

MAT 465 Alt Manifoldların Geometrisi I Final Sınav Soruları	
Ad-Soyad:	Tarih: 12.01.2026
Numara:	Puan:
İmza:	

1. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; (x, y) \rightarrow f(x, y) = x^2 - y^2$ fonksiyonu verilsin. Aşağıdakileri cevaplandırınız.
- (i) f fonksiyonunun kritik noktalarını ve kritik değerlerini bulunuz.
- (ii) $f(x, y) = c$ kümesinin gömülmüş alt manifold belirtip belirtmemesine ilişkin süreci c değerlerine göre inceleyiniz.
2. Aşağıdakileri kısaca cevaplandırınız.

- Sonlu boyutlu reel vektör uzayının topolojik manifold belirtmesi için ne yapılması gerekmektedir.

V sonlu boyutlu reel vektör uzay olsun. V ile $\mathbb{R}^n$ arasında bir lineer izomorfizma kurulmasıyla istenilen elde edilir.

- Topolojik bir manifoldun üzerindeki iki harita (U, φ) ve (V, ψ) olsun. Haritaların uyumluluk sürecini değerlendiriniz.

Burada iki durum vardır. Birincisi $U \cap V = \emptyset$ ise, o zaman haritalar uyumludur. İkincisi $U \cap V \neq \emptyset$ ise, o zaman $\psi \circ \varphi^{-1}$ ve $\varphi \circ \psi^{-1}$ bileşke dönüşümleri smooth olmalıdır.

- İki smooth manifold arasında tanımlı smooth gömülme dönüşümü verilsin. Görüntü kümesinin topolojik manifold olma süreci hakkında bilgi veriniz.

Gömülme dönüşümü tanım gereği görüntüsüne homeomorf olduğundan $F: N \rightarrow M$ dönüşümünde N ve $F(N)$ homeomorf olur. N 'nin topolojik manifold olduğu bilgisiyle $F(N)$ de 2. sayılabilir, hausdorff ve lokal öklidyeen özelliklerini sağlar.

- Sabit rank ve batırma dönüşümleri yardımıyla oluşturulan seviye kümelerinin eş boyutları hakkında bilgi veriniz.

Sabit rank dönüşümünde her bir seviye kümesi sabit rank sayısı kadar eş boyuta sahiptir.

Batırma dönüşümünde her bir seviye kümesi değer manifoldunun boyutu kadar eş boyuta sahiptir.

- Bir smooth manifoldun daldırılmış alt manifoldunun bir gömülmüş alt manifold belirtme koşullarını yazınız.

- Daldırılmış alt manifoldun çevreleyen manifold içerisinde eş boyutu sıfır.

- Daldırılmış alt manifold alt uzay topolojisine göre kompakt.

3. Daldırılmış Alt Manifold, Kesil Harita, Full Rank, $\mathbb{R}^n$ uzayında Difeomorfizm ve Smooth Atlas kavramlarını yazınız.

Ders notunda bulunmaktadır.

Not: Süre 90 dakikadır. 1. Soru 40 Puan, 2. ve 3. Sorular 30 Puandır. Başarılar.

- 1- @ f fonksiyonu açıkça türevelenebilir-dir. Öyleyse $p \in U \subset \mathbb{R}^2$ noktasında df_p diferansiyelinden bahsedilebilir. Buradan,

$$df_p = (f_x|_p, f_y|_p) = (2x|_p, -2y|_p)$$

olmak üzere

$$df_p \equiv 0 \Leftrightarrow x=y=0$$

dir. Bunun anlamı $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ noktası f fonksiyonu için kritik noktadır. $f(0,0) = 0^2 - 0^2 = 0$ değeri de f 'nin bir kritik değeridir.

⑥ Regüler seviye küme teoremine göre $c \neq 0$ için

$$f^{-1}(c) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = x^2 - y^2 = c \}$$

alt kümesi $\mathbb{R}^2$ de 1-boyutlu gömülmüş alt manifold belirtir.

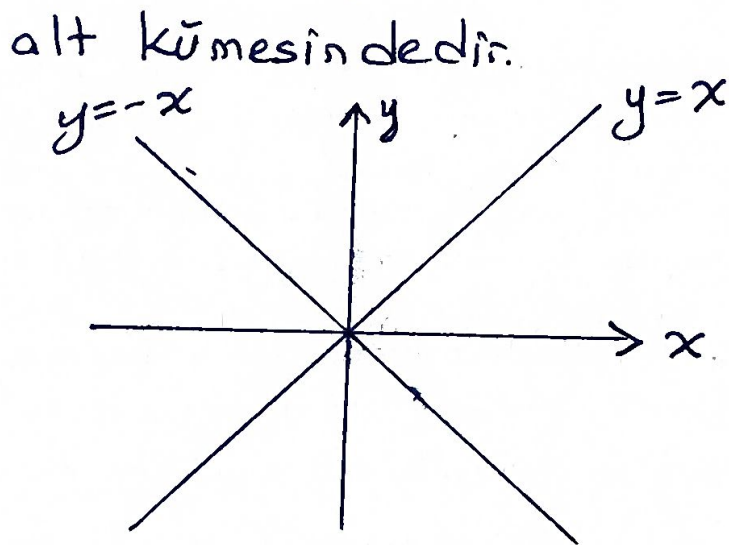
$c = 0$ durumunu inceleyelim. Açıkça

$$f(x,y) = x^2 - y^2 = 0$$

ifadesini sağlayan $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ noktaları

$$f^{-1}(0) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \pm x \}$$

alt kümesindedir.



Kabul edelim $f^{-1}(0)$ kümesi bir gömülmüş alt manifold olsun. $f^{-1}(0)$ 'ın boyutu açık bir küme belirtmediği için 2 olamaz. Ayrıca $f^{-1}(0)$ kümesi sonlu elemanlı olmadığından boyutu sıfır da olamaz. Öyleyse $\text{boy } f^{-1}(0) = 1$ dur. 1-boyutlu topolojik yapılar ya $\mathbb{R}$ ya da S^1 kümelerine homeomorftur. $f^{-1}(0)$ kümesi sınırlı olmadığı için ancak $\mathbb{R}$ 'ye homeomorftur. Fakat $\mathbb{R}$ kümesinden bir noktasının çıkarılmasıyla $\mathbb{R}$ iki bileşene sahip iken $f^{-1}(0)$ dan $(0,0)$ noktasının çıkarılması $f^{-1}(0)$ kümesini 4 bileşene ayırır. Bu yüzden $f^{-1}(0)$ kümesi $\mathbb{R}$ 'yede homeomorftur olamaz. Sonuç olarak, $f^{-1}(0)$ bir gömülmüş alt manifold belirtmez.