3.2. PROBLEMLER

3.2.1. Aşağıdaki fonksiyonların tanım kümelerini bulunuz ve geometrik olarak belirtiniz.

a) $f(x,y,z) = x^2y + xy^2 + 2$, b) $f(x,y) = \sqrt{y-x}$, c) $h(x,y,z) = \ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,

d) $g(x,y,z) = e^{x+z+\frac{y}{x-1}}$, e) $f(x,y) = \ln\frac{x+1}{y+3}$, f) $k(x,y,z) = \sqrt{xy} + \ln(x^2+y^2+z^2-4)$,

g) $f(x,y) = \sqrt{36-4x^2-9y^2}$, h) $f(x,y) = \frac{(y-1)(y-3)}{(x-4)(x+2)}$.

3.2.2. Aşağıdaki fonksiyonların tanım ve görüntü kümelerini bulunuz ve geometrik olarak belirtiniz.

a) $f(x,y) = e^{\sin(xy)}$, b) $f(x,y) = \ln x + \ln y + 1$, c) $f(x,y) = x^2 + 4y^2$,

d) $g(x,y) = \sqrt{xy} + 1$, e) $g(x,y) = \arctan\frac{y}{x}$, f) $g(x,y) = \sqrt{\frac{y-x}{y+x}}$.

3.2.3. **a)** Tanımı kullanarak (ε, δ tekniği ile) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx + b$ nin $\mathbb{R}$ de sürekli olduğunu gösteriniz.

b) $f(x,y) = 2x + y - 1$ ise tanımı kullanarak f nin $\mathbb{R}$ de sürekli olduğunugösteriniz.

c) Tanımı kullanarak $f(x,y,z) = x^2y + 2xz^2$ nin $(1,1,1)$ de sürekli olduğunu gösteriniz.

3.2.4. Aşağıdaki fonksiyonların her birinin sürekli olduğu kümeleri belirtiniz.

a) $f(x,y) = \frac{2x-y}{x^2+y^2}$, b) $f(x,y) = \frac{x^2}{x-y}$, c) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$,

d) $f(x,y) = \frac{1}{x^2-y^2}$, e) $g(x,y,z) = \arctan\frac{xz^2}{x+y}$, f) $g(x,y,z) = \sin(xyz)$.

3.2.5. Dizisel sürekliliği kullanarak aşağıdaki fonksiyonların 0 da süreksiz olduğunu gösteriniz.

$$a)\quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ b, & x = 0 \end{cases} \qquad b)\quad f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ b, & x = 0 \end{cases}$$

3.2.6. f, $x_0 \in \mathbb{R}$ de sürekli ise $x_0 \in I$ ve $f(I)$ sınırlı olacakşekilde I açık aralığının varlığını gösteriniz.

3.2.7. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

olarak tanımlanan f nin $(0,0)$ da sürekli olmadığını gösteriniz.

3.2.8. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$ olarak tanımlanan f fonksiyonunun sürekli olduğunu gösteriniz.

3.2.9.

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

skaler değerli fonksiyonu ve $f(t) = (t, mt)$, $k(t) = (t, t^2)$ vektör değerli fonksiyonları veriliyor.

a) $\lim_{t\to 0} g(f(t)) = 0$ olduğunu gösteriniz (Böylece orijinden geçen herhangi bir doğru üzerinde süreklidir).

b) $\lim_{t\to 0} g(k(t)) = 1$ olduğunu gösteriniz. Böylece g nin orijinde sürekli olmadığını açıklayınız.

3.2.10. Aşağıdaki fonksiyonların dizisel sürekli olduklarını gösteriniz.

a) $f(x) = 3x + 2$, b) $f(x,y) = x^2 + 2x + 1$, c) $f(x) = \sqrt{x}, (x > 0)$,

d) $g(x,y) = x + y - 1$, e) $g(x,y) = x^2 + xy$, f) $g(x,y) = xy + 2$.

3.2.11. Aşağıda verilen vektör değerli fonksiyonların sürekli olup olmadıklarını araştırınız.

a) $f(x,y) = (x^2, 2y)$, b) $f(x,y) = (1/(x-1), \sin y)$, c) $f(x,y) = (2, \tan x)$.

d) $g(x,y,z) = (x, 2xy, z/(x-1))$, e) $g(x,y,z) = (\cos(xy), y^2, 1)$.

3.2.12. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız (bileşike fonksiyonların limiti).

a) $\lim_{(x,y)\to(0,1)}[e^{x^2+2x}\ln(e^2y^4)]$, b) $\lim_{(x,y)\to(0,1)} \arcsin(xy)$.

c) $\lim_{p\to(\pi,0,3)}[ze^{-2y}\cos(2x)]$.

3.2.13.

a) $f(x,y) = xe^y$, $g(t) = 3t^2 + t + 1$; b) $f(x,y) = y - 4x^2$, $g(t) = \sin\sqrt{t}$

ise her bir şık için $g(f(x,y))$ yi teşkil ediniz, tanım kümesini belirtiniz ve sürekliliğini araştırınız.

3.2.14. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli ise $g(x) = f(2x + x^2)$ olarak tanımlanan g fonksiyonunun sürekli olduğunu gösteriniz.

3.2.15. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{|x|}$ fonksiyonunun sürekli olduğunu gösteriniz.

3.2.16. $\mathbb{R}^n$ de aşağıdaki şekilde tanımlanan fonksiyonların sürekli olduklarını gösteriniz.

a) $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n) = b$, $b \in \mathbb{R}$ sabit, b) $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, c) $P_i(\mathbf{x}) = P_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$

3.2.17. $f(x_1, \ldots, x_n) = x_i^k$ olsun. Problem 16 yı ve Teorem 3.19 'u ve tümevarım yöntemini kullanarak f nin $\mathbb{R}^n$ de sürekli olduğunu gösteriniz.

3.2.18. Problem 17 yı kullanarak $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x_1, \ldots, x_n) = cx_1^k \ldots x_n^k$ olarak tanımlanan f nin sürekli olduğunu gösteriniz (Burada c, bir sabittir).

3.2.19. Problem 18 'i kullanarak çok değişkenli polinomların sürekli olduğunu gösteriniz.

3.2.20. Problem 19 'u ve 3.19. Teoremini kullanarak çok değişkenli rasyonel fonkisyonun tanım kümesinde sürekli olduğunu gösteriniz.

3.2.21. $f : [0,1] \to [0,1]$ sürekli bir fonksiyon olsun. f nin sabit bir noktasının yani $f(x_0) = x_0$ olacak şekilde bir $x_0 \in [0,1]$ olduğunu gösteriniz.

3.2.22. Bileşke fonksiyon teoremini kullanarak $\mathbb{R}$ de $a_k \to a$ ve $b_k \to b$ ise $a_k b_k \to ab$ olduğunu gösteriniz.

3.2.23. Aşağıdaki fonksiyonların her birinin süreksiz olduğu noktaları bulunuz. Bu süreksizliklerin hangileri kaldırılabilirdir?

a) $f(x,y) = \frac{x-y}{x^2-y^2}$, *b*) $f(x,y) = \sin\frac{y}{x}$, *c*) $f(x,y) = \ln(x-y)$ •