CEVAP ANAHTARI

1. soru	2. soru	3. soru	4. soru	5. soru	6. soru	7. soru	Toplam

Adı Soyadı: **26.06.2026**

Numara:

MAT 102 ANALİZ II DERSİ BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI

1) $\sqrt[4]{610}$ sayısının yaklaşık değerini bulunuz **(10 puan).**

2) Aşağıda verilen integralleri hesaplayınız **(30 puan).**

a) $\int (\cos x)^7 dx$ **b)** $\int \sin(\ln x) dx$ **c)** $\int_0^2 [\![2x+1]\!]\, dx$

3) İntegral hesabının 1. temel teoremini ifade ediniz **(10 puan).**

4) $y=-x^2+3x-2$ eğrisinin x ekseni ile sınırlandırdığı bölgenin y ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan dönel cismin hacmini bulunuz. **(10 puan).**

5) $y=\ln(\cos x)$ eğrisinin $x=\frac{\pi}{4}$ ve $x=\frac{\pi}{3}$ arasında kalan kısmının yay uzunluğunu bulunuz **(10 puan).**

6) f sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$\int_0^{\frac{\Pi}{2}} f(\sin x)\, dx = \int_0^{\frac{\Pi}{2}} f(\cos x)\, dx$$

eşitliğinin doğru olduğunu gösteriniz **(10 puan).**

7) $[a,b]$ aralığında tanımlı reel değerli fonksiyonlar için aşağıda boş bırakılan yerlere **Doğru veya Yanlış** yazınız **(20 puan).**

a) İntegrallenebilir iki fonksiyonun çarpımları da integrallenebilirdir ..Doğru..

b) İntegrallenebilir iki fonksiyonun bölümleri de integrallenebilirdir .....Yanlış..

c) $\int_a^b f(x)\, dx = 0$ ise her $x \in [a,b]$için $f(x)=0$ olur......Yanlış...

d) Bir fonksiyon integrallenebilir ise türevlenebilirdir. .....Yanlış..

e) Monoton bir fonksiyon integrallenebilirdir. ....Doğru

Not: 2. sorudaki her şık 10 puan ve 7. sorudaki her şık 4 puandır.

Süre 90 dakikadır.

BAŞARILAR…

① Burada $f(x) = \sqrt[4]{x}$ alınır. Ayrıca $x_0 = 625$ ve

$x_1 = 610$ olmak üzere

$$f(x_1) = \sqrt[4]{610} \approx f(625) + f'(625).(610-625) \quad \ldots (1)$$

biçimindedir. Yine $f(625) = \sqrt[4]{625} = 5$ ve

$$f(x) = x^{1/4} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}} \text{ olup } f'(625) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{625}\right)^{\frac{3}{4}} = \frac{1}{500}$$

olup (1) den

$$\sqrt[4]{610} \approx 5 + \frac{1}{500}(-15)$$

$$\approx 5 - 0{,}03$$

$$\approx 4{,}97$$

bulunur

② a) $\int \cos^7 x\,dx = \int \cos x . \cos^6 x\,dx$

$$= \int \cos x\,(1 - \sin^2 x)^3\,dx$$

olur. Son integralde $u = \sin x$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$du = \cos x\,dx$ olup

$$\int \cos^7 x\,dx = \int (1-u^2)^3\,du$$

$$= \int (1 - 3u^2 + 3u^4 - u^6)\,du$$

$$= u - u^3 + \frac{7}{5} u^5 - \frac{u^7}{7} + c$$

$$= \sin x - \sin^3 x + \frac{7}{5} \sin^5 x - \frac{\sin^7 x}{7} + c$$

bulunur

b)

$\int \sin(\ln x)\,dx$ integrali için kısmi integrasyon metodunu

kullanalım $u = \sin(\ln x) \Rightarrow du = \dfrac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$ $\quad dv = 1.dx \Rightarrow v = x$

olup

$$\int \sin(\ln x)\,dx = x.\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx \quad \dots (1)$$

olur. $\int \cos(\ln x)\,dx$ integralinde kısmi integrasyon metodu kullanılırsa

$u = \cos(\ln x) \Rightarrow du = -\dfrac{\sin(\ln x)}{x}.dx \quad , \quad dv = 1.dx \Rightarrow v = x$

olup

$$\int \cos(\ln x)\,dx = x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)\,dx \quad \dots (2)$$

bulunur. (1) ve (2) den

$$\int \sin(\ln x)\,dx = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)\,dx$$

olup

$$2\int \sin(\ln x)\,dx = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x)$$

olduğundan

$$\int \sin(\ln x)\,dx = \frac{1}{2}\Big(x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x)\Big) + c$$

elde edilir.

c) $$\int_0^2 [\![2x+1]\!]\,dx = \int_0^2 [\![2x]\!]\,dx + \int_0^2 1\,dx \quad \dots (1)$$

olup $x_1 = 0,\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = 1,\ x_4 = \frac{3}{2},\ x_5 = 2$ noktalarında $[\![2x]\!]$

ifadesinin içi tamsayı olur. O halde

$$\int_0^2 [\![2x]\!]\,dx = \int_0^{1/2} [\![2x]\!]\,dx + \int_{1/2}^{1} [\![2x]\!]\,dx + \int_1^{3/2} [\![2x]\!]\,dx + \int_{3/2}^{2} [\![2x]\!]\,dx$$

$$= \int_0^{1/2} 0\,dx + \int_{1/2}^{1} 1\,dx + \int_1^{3/2} 2\,dx + \int_{3/2}^{2} 3\,dx$$

c şıkkının devamı

$$\int_0^2 [\![2x]\!]\,dx = 0 + x\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} + 2x\Big|_{1}^{3/2} + 3x\Big|_{3/2}^{2}$$

$$= \left(1-\frac{1}{2}\right) + 2\cdot\left(\frac{3}{2}-1\right) + 3\left(2-\frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[1+2+3\right] = \frac{6}{2} = 3$$

olur. (1) den

$$\int_0^2 [\![2x+1]\!]\,dx = 3 + \int_0^2 1.dx = 3 + x\Big|_0^2 = 3+2 = 5$$

elde edilir

3) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$ olsun. O halde F fonksiyonu türevlenebilirdir ve

türevi $\forall x\in[a,b]$ için $F'(x) = f(x)$ olur.

4) Bu dönel cismin hacminin hesabında kabuk yöntemini kullandım.

$y = -x^2+3x-2$ kolları aşağı bakan bir parabol olup x eksenini

kestiği noktalara bakalım.

$$-x^2+3x-2 = 0 \Rightarrow -\left(x^2-3x+2\right) = 0 \Rightarrow x=1,\ x=2 \quad \text{olur.}$$

İstenen hacime V denirse

$$V = 2\pi\int_1^2 x(-x^2+3x-2)\,dx$$

$$= 2\pi\int_1^2 (-x^3+3x^2-2x)\,dx$$

$$= 2\pi\left[-\frac{x^4}{4}+x^3-x^2\right]\Big|_1^2 = 2\pi\left[(-4+8-4)-\left(-\frac{1}{4}+1-1\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

elde edilir.

5) Aranan yay uzunluğuna L denirse

$$L = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1+\left((\ln \cos x)'\right)^2}\, dx$$ olur.

Burada $\frac{d}{dx}(\ln \cos x) = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$ olup

$$L = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1+\tan^2 x}\, dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\sec^2 x}\, dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sec x\, dx = \ln|\sec x + \tan x| \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$

olduğundan

$$L = \ln\left(\sec\frac{\pi}{3} + \tan\frac{\pi}{3}\right) - \ln\left(\sec\frac{\pi}{4} + \tan\frac{\pi}{4}\right) = \ln(2+\sqrt{3}) - \ln(\sqrt{2}+1) = \ln\left(\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}\right)$$

elde edilir.

6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\, dx$ integralinde $u = \frac{\pi}{2} - x$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$du = -dx$ olup sınırlarda değişir. $\left\{ \begin{array}{l} x_0 = 0 \Rightarrow u_0 = \frac{\pi}{2} \\ x_1 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u_1 = 0 \end{array} \right\}$

Böylece

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\, dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\right) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\right) du$$

olup $\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos u$ olduğundan

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\, dx$$

elde edilir.