Adı Soyadı:
Numarası:

03.05.2024

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ FEN FAKÜLTESİ MATEMATİK BÖLÜMÜ
2023-2024 EĞİTİM ÖĞRETİM YILI MAT 102 ANALİZ II ARASINAV SORULARI

1) $y = x^{\arcsin(x^2)}$ fonksiyonunun türevini bulunuz. (10 puan)

2) $y = \ln\left(\tan\frac{x}{2}\right) - \frac{\cos x}{\sin^2 x}$ fonksiyonunun $x = \frac{\pi}{2}$ noktasında çizilen teğet ve normal doğrusu denklemlerini bulunuz. (10 puan)

3) $f(x) = \begin{cases} -3x^2 + 4x, & 0 \le x < 1 \\ 3 - 2x, & 1 \le x \le \pi \end{cases}$ fonksiyonuna $[0, \pi]$ aralığında Rolle ve Ortalama Değer teoremleri uygulanabilir mi? Evet ise uygun c sayılarını bulunuz. (15 puan)

4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - 1$ fonksiyonu verilsin.

a) Türev tanımını kullanarak f fonksiyonunun türevini bulunuz. (10 puan),

b) f fonksiyonunun varsa ekstremum noktalarını ve dönüm noktalarını bulunuz, artanlık-azalanlık, konvekslik-konkavlık durumunu inceleyiniz. (10 puan)

5) Aşağıdaki limitleri L'Hospital kuralını kullanarak hesaplayınız.

a) $\lim\limits_{x \to \infty} x . \ln\frac{x+3}{x-3}$ (5 puan) b) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1 + \cos \pi x}{x^2 - 2x + 1}$ (5 puan)

6) Çevresi 100 cm olan dikdörtgenler içerisinde alanı maksimum olanın kenar uzunluklarını bulunuz. (10 puan)

7) Aşağıdaki fonksiyonların varsa düşey ve yatay asimptotlarını bulunuz.

b) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 4}{x^2 - x - 2}$ (5 puan) b) $f(x) = \frac{3x^2 + 4}{x - 1}$ (5 puan)

8) Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a) $\int \frac{e^x}{e^x + 1}\, dx$ (5 puan) b) $\int \sin^7 x\, dx$ (5 puan) c) $\int \frac{x^2}{x^3 + x^2 - x - 1}\, dx$ (5 puan)

Not: Sınav süresi 100 dakikadır.

Başarılar...
Doç. Dr. Nilay DEĞİRMEN

ANALİZ II ARASINAV ÇÖZÜMLERİ

1-) $y = x^{\arcsin(x^2)}$

$\ln y = \arcsin(x^2) . \ln x$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} . 2x . \ln x + \arcsin(x^2) \frac{1}{x}$$

$$y' = x^{\arcsin(x^2)} . \left(\frac{2x \ln x}{\sqrt{1-x^4}} + \frac{\arcsin(x^2)}{x} \right)$$

2-) $y = \ln\left(\tan\frac{x}{2}\right) - \frac{\cos x}{\sin^2 x}$

$x = \frac{\pi}{2}$ için $y=0$ dır. $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ noktasındaki teğeti arıyoruz.

$$y' = \frac{1}{\tan\frac{x}{2}} . \left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right) . \frac{1}{2} - \left(\frac{-\sin x . \sin^2 x - \cos x . 2\sin x \cos x}{\sin^4 x} \right)$$

$$= \frac{1}{2} . \frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}} + \frac{\sin^3 x + 2\sin x \cos^2 x}{\sin^4 x}$$

$$y'\Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} . \frac{1+1}{1} + \frac{1+0}{1} = 2 = m_{\text{Teğet}} \Rightarrow m_{\text{Normal}} = -\frac{1}{2}$$

Teğet Doğrusunun Denklemi: $y - 0 = 2 . \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

Normal " " : $y - 0 = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

3-) $f(x) = \begin{cases} -3x^2+4x , & 0 \le x < 1 \\ 3-2x , & 1 \le x \le \pi \end{cases}$, $[0,\pi]$

$x = 1$ kritik Nokta

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 3-2x = 1 \\ &\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} -3x^2+4x = 1 \\ &f(1) = 1 \end{aligned}\right\}$$ old. f, $x=1$ de süreklidir.

$$\left.\begin{aligned} &f'(1^+) = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{3-2x-1}{x-1} = -2 \\ &f'(1^-) = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{4x-3x^2-1}{x-1} = -2 \end{aligned}\right\}$$ old. f, $x=1$ de türevlidir.

$f(0) = 0 \ne 3-2\pi = f(\pi)$

Böylece f fonksiyonuna ODT uygulanabilir, Rolle teoremi uygulanamaz. ODT gereği $f'(c) = \frac{f(\pi)-f(0)}{\pi - 0}$ o.ş. $c \in (0,\pi)$ vardır.

$$f'(x)=\begin{cases} 4-6x, & 0<x<1 \\ -2, & x=1 \\ -2, & 1<x<\pi \end{cases}, \quad f(\pi)=3-2\pi, \quad f(0)=0$$

$$f'(c)=\frac{3-2\pi}{\pi}, \quad c\in(0,1)$$

$$4-6c=\frac{3-2\pi}{\pi} \Rightarrow 4\pi-6\pi c=3-2\pi \Rightarrow 6\pi-3=6\pi c$$

$$\Rightarrow 1-\frac{1}{2\pi}=c\in(0,1)$$

4) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-1$

a) $$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{((x+h)^3-1)-(x^3-1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\cancel{(x+h-x)}\,((x+h)^2+x^2+x.(x+h))}{\cancel{h}}$$

$$=3x^2$$

b) $f'(x)=3x^2\geqslant0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ old. f $\mathbb{R}$ de artandır.

Ekstremum noktası yoktur.

$f''(x)=6x=0 \Rightarrow x=0$

x		0	
f''	$-$	0	$+$
	konkav		konveks

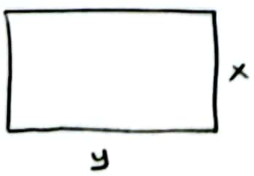
$x=0$ Dönüm noktası

$(-\infty,0)$ da f konkav, $(0,\infty)$ da konvekstir.

5) a) $$\lim_{x\to\infty}x.\ln\frac{x+3}{x-3}\overset{\infty.0}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\frac{x+3}{x-3}}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{LH}{=}}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\frac{x+3}{x-3}}.\left(\frac{x-3-(x+3)}{(x-3)^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-6}{x^2-9}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2}{x^2-9}=6$$

b) $$\lim_{x\to1}\frac{1+\cos\pi x}{x^2-2x+1}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{LH}{=}}\lim_{x\to1}\frac{-(\sin\pi x).\pi}{2x-2}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{LH}{=}}\lim_{x\to1}\frac{-\pi^2.\cos\pi x}{2}=\frac{\pi^2}{2}$$

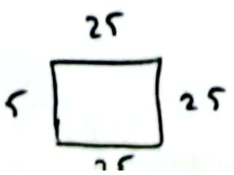
6) 

$2x+2y=100 \Rightarrow x+y=50 \Rightarrow y=50-x$

Dikdörtgenin Alanı : $A=x.y=x(50-x)$

$A(x)=50x-x^2$

$A'(x)=50-2x=0 \Rightarrow x=25$



$A''(x)=-2<0$ old. $x=25$

yerel maksimum noktadır.

$x=25$, $y=25$

7) a) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+4}{x^2-x-2}$

$\lim\limits_{x\to\mp\infty}\dfrac{x^2-3x+4}{x^2-x-2}=1$ olduğundan $y=1$ yatay asimptottur.

$f(x)=\dfrac{x^2-3x+4}{(x-2)(x+1)}$

$\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{x^2-3x+4}{(x-2)(x+1)}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{x^2-3x+4}{(x-2)(x+1)}=+\infty$

old. $x=-1$ düşey asimptottur.

$\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x^2-3x+4}{(x-2)(x+1)}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x^2-3x+4}{(x-2)(x+1)}=-\infty$

old. $x=2$ düşey asimptottur.

b) $f(x)=\dfrac{3x^2+4}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to\mp\infty}f(x)=\mp\infty$ olduğundan yatay asimptot yoktur.

$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{3x^2+4}{x-1}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{3x^2+4}{x-1}=-\infty$

old. $x=1$ düşey asimptottur.

8) a) $\displaystyle\int\frac{e^x}{e^x+1}dx=$ $\boxed{\begin{array}{l}e^x+1=u\\ e^x dx=du\end{array}}$ $\displaystyle\int\frac{du}{u}=\ln|u|+c=\ln(e^x+1)+c$

b) $\displaystyle\int\sin^7x\,dx=\int(\sin^2x)^3\sin x\,dx=\int(1-\cos^2x)^3\cdot\sin x\,dx$

$\boxed{\begin{array}{l}\cos x=u\\ -\sin x\,dx=du\end{array}}$

$\displaystyle=\int(1-u^2)^3(-du)=-\int u^6+3u^4-3u^2+1\,du$

$\displaystyle=-\left(\frac{u^7}{7}+3\cdot\frac{u^5}{5}-u^3+u\right)+c=\frac{-(\cos x)^7}{7}-\frac{3}{5}(\cos x)^5+\cos^3x-\cos x+c$

c) $\displaystyle\int\frac{x^2}{x^3+x^2-x-1}dx=\int\frac{x^2}{(x-1)(x+1)^2}dx=\frac14\int\frac{1}{x-1}dx+\frac34\int\frac{1}{x+1}dx-\frac12\int\frac{1}{(x+1)^2}dx$

$\dfrac{x^2}{(x-1)(x+1)^2}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{(x+1)^2}\Rightarrow A=\dfrac14,\ B=\dfrac34,\ C=-\dfrac12$

$=\dfrac14\ln|x-1|+\dfrac34\ln|x+1|+\dfrac12\cdot\dfrac{1}{x+1}+c$

CamScanner ile tarandı