Adı Soyadı: **14.11.2024**

Numara:

MAT 211 ANALİZ III DERSİ ARA SINAV SORULARI

1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak ise $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ olduğunu gösteriniz (10 puan).

2) $\int_{0}^{+\infty} \frac{4}{x^2+2x+2}\,dx$ integralini hesaplayınız (15 puan).

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{1-\cos^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$ serisinin karakterini belirleyiniz (10 puan).

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n^2+1}}$ serisi mutlak yakınsak mıdır? Koşullu yakınsak mıdır? Araştırınız (15puan).

5) $\lim_{n\to\infty} \int_{0}^{1} \frac{2nx+\sin\left(nx^2\right)}{n}\,dx$ değerini bulunuz (15 puan).

6) $\int_{0}^{1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{3^{n+1}} x^n\,dx$ değerini bulunuz (15 puan).

7) Aşağıda boş bırakılan yerlere **Doğru veya Yanlış** yazınız (20 puan).

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos(n\pi)$ serisi bir alterne seridir. ....Yanlış....

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisi ıraksak bir seridir. ...Doğru....

c) Düzgün yakınsak bir fonksiyon dizisi noktasal yakınsaktır. ...Doğru...

d) $\int_{0}^{\pi} \frac{2-2\cos x}{x^2}\,dx$ integrali ikinci çeşit bir has olmayan integraldir. ...Yanlış....

Not: 7. sorudaki her şık 5 puandır. Süre 90 dakikadır.

Dr. Erdem TOKSOY

= CEVAP ANAHTARI =

1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak olsun. Eğer (s_n) dizisi bu serinin kısmi toplamlar dizisi ise (s_n) yakınsak olur. Burada $s \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ olsun. O halde (s_n) nin (s_{n-1}) alt dizisi için de $\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s$ olur. Böylece $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$s_n - s_{n-1} = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n - a_1 - a_2 - \dots - a_{n-1} = a_n$$

olup

$$\lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0 = \lim_{n\to\infty} a_n$$

elde edilir.

2) Bu integral birinci çeşit has olmayan integraldir.

$$\int_0^{+\infty} \frac{4}{x^2+2x+2}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{4}{(x+1)^2+1}\,dx$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left(4 \arctan(x+1) \Big|_0^b \right)$$

$$= \lim_{b\to+\infty} 4\left[\arctan(b+1) - \arctan(1)\right]$$

$$= 4\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \pi$$

elde edilir.

3) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $0 < \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 1$ olup $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) > 0$ olur. Böylece $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = \sqrt{1-\left(1-\sin^2\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = \sqrt{\sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = \sin\frac{1}{\sqrt{n}}$$

olup

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{1-\cos^2\frac{1}{\sqrt{n}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

yazılır.

3. cevabın devamı) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ ve $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}}$$

için $\frac{1}{\sqrt{n}} = u$ denirse $n\to\infty \Leftrightarrow u \to 0^+$ olup

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{u\to 0^+} \frac{\sin u}{u} = 1$$

olur. Burada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ serisi p-serisi olup $p = \frac{1}{2} < 1$ olduğundan ıraksaktır. Bu takdirde limit karşılaştırma testinden $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ıraksaktır.

4) Burada $(\cos(n\pi)) = (-1, 1, -1, 1, \ldots, (-1)^n, \ldots) = ((-1)^n)$ olup

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n^2+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$$

olduğundan bu seri alterne seridir. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ olsun.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = 0$$

olur. Ayrıca $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} > \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2+1}} = a_{n+1} \Leftrightarrow a_n > a_{n+1}$ olduğundan (a_n) monoton azalandır. O halde Leibniz testinden verilen seri yakınsaktır. Bu seri mutlak yakınsak mıdır? Burada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n^2+1}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(-1)^n|}{\sqrt{n^2+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

yazılır. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $b_n = \frac{1}{n}$ olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ıraksak serisini alalım.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1$$

olup limit karşılaştırma testinden $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ ıraksaktır. O halde verilen seri mutlak yakınsak değildir. Bu takdirde verilen seri koşullu yakınsaktır.

5) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{2nx + \sin(nx^2)}{n}$

fonksiyonlarının (f_n) dizisini alalım. Burada $\forall x \in [0,1]$ için

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{2nx + \sin(nx^2)}{n} = \lim_{n\to\infty} 2x + \frac{\sin(nx^2)}{n} = 2x$$

olur. (f_n) dizisi $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$ fonksiyonuna noktasal yakınsaktır.

Ayrıca $\forall n \in \mathbb{N}$ için f_n fonksiyonları süreklidir. Şimdi $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$a_n = \sup\{ |f_n(x) - f(x)| \, ; x \in [0,1] \}$$
$$= \sup\left\{ \left| 2x + \frac{\sin(nx^2)}{n} - 2x \right| ; x \in [0,1] \right\}$$
$$= \sup\left\{ \frac{|\sin(nx^2)|}{n} ; x \in [0,1] \right\} \leq \frac{1}{n}$$

olup $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n}$ yazılır. Burada $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ olduğundan

sıkıştırma teoreminden $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ olur. Bu takdirde Weierstrass

kriteri gereği (f_n), f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır. O halde

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{2nx + \sin(nx^2)}{n} \, dx = \int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} \frac{2nx + \sin(nx^2)}{n} \right) dx$$
$$= \int_0^1 2x \, dx = x^2 \Big|_0^1 = 1$$

bulunur.

6) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{n+1}{3^{n+1}} x^n$ fonksiyonlarının (f_n) dizisini alalım.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için f_n fonksiyonları süreklidir. Ayrıca $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ve $\forall x \in [0,1]$ için

$$|f_n(x)| = \frac{n+1}{3^{n+1}} |x|^n \leq \frac{n+1}{3^{n+1}} = M_n$$

yazılır. Burada $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} M_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{3^{n+1}}$ pozitif terimli sayı serisi

elde edilir.

6. cevabın devamı)

$\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ sayı serisi için oran testini kullanalım. O halde

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_{n+1}}{M_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{\cancel{3^{n+1}}\cdot 3} \cdot \frac{\cancel{3^{n+1}}}{n+1}$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{3} < 1$$

olup oran testinden $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ pozitif terimli sayı serisi yakınsak olur.

Bu takdirde Weierstrass M-Kriteri gereği $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ düzgün yakınsaktır.

Böylece

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{3^{n+1}} \cdot x^n \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{n+1}{3^{n+1}} x^n \, dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cancel{n+1}}{3^{n+1}} \frac{x^{n+1}}{\cancel{n+1}} \Bigg|_0^1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad \left(\text{geometrik seri } r = \frac{1}{3} < 1 \text{ yakınsak}\right)$$

$$= \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

elde edilir.