Adı-Soyadı:

Numarası:

1	2	3	4	5	6	7	Toplam Puan

MAT212 ANALİZ IV DERSİ
FİNAL SINAV SORULARI

1. $z = 4e^x \ln y,\ \ x = \ln(u \cos v),\ \ y = u \sin v$ olduğuna göre $\dfrac{\partial z}{\partial u},\ \dfrac{\partial z}{\partial v}$ kısmi türevlerini ve $\left.\dfrac{\partial z}{\partial u}\right|_{(2,\,\pi/4)},\ \left.\dfrac{\partial z}{\partial v}\right|_{(2,\,\pi/4)}$ değerlerini bulunuz. *(15 Puan)*

2. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ |f(x)| \le \|x\|^2$ koşulunu sağlıyorsa $f,\ \ 0 \in \mathbb{R}^n$ noktasında türevlenebilir midir? Neden? *(15 Puan)*

3. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ elipsoidi içine yerleştirilebilen ve hacmi maksimum olan dikdörtgenler prizmasının hacmini Lagrange yöntemi ile bulunuz. *(10 Puan)*

4. $v \in \mathbb{R},\ \ v > 0$ ve $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \ f(u,v) = \left(u^3 - v^2,\ \sin u - \ln v\right)$ fonksiyonunun $(0,1)$ noktası civarında diferensiyellenebilir bir ters fonksiyona sahip olduğunu gösteriniz. Varsa $Df^{-1}(-1,0)$ türev matrisini bulunuz. *(15 Puan)*

5. $f(x,y) = xy\left(4 - x^2 - y^2\right)$ fonksiyonunun varsa ekstremumlarını bulunuz. *(15 Puan)*

6. $F(x,y,u,v) = x^2 y - u + v^2 x = 0, \quad G(x,y,u,v) = x - 2y + u^2 - 2v = 0$ denklemleri verilmiş olsun. Hangi koşullar altında u ve v; x ve y cinsinden çözülebilir? u_x ve v_y kısmi türevlerini bulunuz. *(15 Puan)*

7. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız. *(15 Puan)*

a) $I = \displaystyle\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2}\, dx\, dy$

b) $I = \displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, dy\, dx$

Ders Sorumlusu: Prof. Dr. Birsen SAĞIR DUYAR
Süre: 110 dakikadır.
Tarih: 08.06.2026

Başarılar dilerim.

ÇÖZÜMLER

1. Zincir kuralı ile ($e^x = u\cos v,\ \ y = u\sin v$):

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = 4e^x \ln y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{4e^x}{y}.$$

$x = \ln(u\cos v) \Rightarrow \dfrac{\partial x}{\partial u} = \dfrac{1}{u}$, $\dfrac{\partial x}{\partial v} = -\tan v$; $y = u\sin v \Rightarrow \dfrac{\partial y}{\partial u} = \sin v$, $\dfrac{\partial y}{\partial v} = u\cos v$.

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 4e^x \ln y \cdot \frac{1}{u} + \frac{4e^x}{y}\sin v = 4\cos v\,\ln(u\sin v) + 4\cos v.$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = 4e^x \ln y\,(-\tan v) + \frac{4e^x}{y}u\cos v = -4u\sin v\,\ln(u\sin v) + \frac{4u\cos^2 v}{\sin v}.$$

$(u,v) = (2, \frac{\pi}{4})$ için $\cos v = \sin v = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $u\sin v = \sqrt{2}$:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial u}\right|_{(2,\pi/4)} = 2\sqrt{2}\,\ln\sqrt{2} + 2\sqrt{2}, \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial v}\right|_{(2,\pi/4)} = -4\sqrt{2}\,\ln\sqrt{2} + 4\sqrt{2}.$$

2. Türev tanımı: a noktasında $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\|f(x)-f(a)-L(x-a)\|}{\|x-a\|} = 0$ olacak biçimde lineer L varsa $L = Df(a)$.

$|f(x)| \le \|x\|^2$ koşulunda $x = 0$ alınırsa $0 \le |f(0)| \le \|0\|^2 = 0$, yani $f(0) = 0$.

$L = 0$ (sıfır dönüşümü) seçelim. Her $x \neq 0$ için

$$0 \le \frac{|f(x) - f(0) - L(x)|}{\|x\|} = \frac{|f(x)|}{\|x\|} \le \frac{\|x\|^2}{\|x\|} = \|x\| \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

Sıkıştırma teoreminden limit 0'dır. Dolayısıyla f, 0 noktasında türevlenebilir ve $Df(0) = 0$ (sıfır dönüşümü).

3. Prizmanın birinci bölgedeki köşesi (x,y,z), $x,y,z > 0$ olsun. Elipsoid merkeze göre simetrik olduğundan kenarlar $2x, 2y, 2z$ ve hacim $V = 8xyz$. $f(x,y,z) = xyz$'yi $g = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ koşulu altında maksimize edelim.

$$\nabla f = \lambda\nabla g: \quad yz = \frac{2\lambda x}{a^2}, \quad xz = \frac{2\lambda y}{b^2}, \quad xy = \frac{2\lambda z}{c^2}.$$

Bunları sırasıyla x, y, z ile çarpıp toplarsak ve $g = 0$ kullanırsak

$$3xyz = 2\lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) = 2\lambda \ \Rightarrow\ \lambda = \tfrac{3}{2}xyz.$$

Buradan $\dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{xyz}{2\lambda} = \dfrac{1}{3}$, yani

$$x = \frac{a}{\sqrt{3}}, \qquad y = \frac{b}{\sqrt{3}}, \qquad z = \frac{c}{\sqrt{3}}.$$

$$\boxed{V_{\max} = 8xyz = 8\cdot\frac{a}{\sqrt{3}}\cdot\frac{b}{\sqrt{3}}\cdot\frac{c}{\sqrt{3}} = \frac{8abc}{3\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}\,abc}{9}}$$

4. $f_1 = u^3 - v^2, \quad f_2 = \sin u - \ln v$ bileşenlerinin kısmi türevleri var ve süreklidir; dolayısıyla f türevlenebilirdir (C^1).

$$J_f = \begin{bmatrix} 3u^2 & -2v \\ \cos u & -\dfrac{1}{v} \end{bmatrix}, \qquad J_f(0,1) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \det = 0 \cdot (-1) - (-2) \cdot 1 = 2 \neq 0.$$

$\det \neq 0$ olduğundan Ters Fonksiyon Teoremi gereği f, $(0,1)$ komşuluğunda diferensiyellenebilir bir f^{-1} tersine sahiptir. $f(0,1) = (-1,0)$ olduğundan

$$Df^{-1}(-1,0) = [Df(0,1)]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

5. $f(x,y) = 4xy - x^3y - xy^3$.

$$f_x = 4y - 3x^2y - y^3 = y(4 - 3x^2 - y^2), \qquad f_y = 4x - x^3 - 3xy^2 = x(4 - x^2 - 3y^2).$$

$f_x = f_y = 0$: $y = 0, x = 0$'dan $(0,0)$; $3x^2 + y^2 = 4$ ve $x^2 + 3y^2 = 4$ sisteminden $x^2 = y^2 = 1$, yani $(\pm 1, \pm 1)$.

İkinci türevler: $f_{xx} = -6xy$, $f_{yy} = -6xy$, $f_{xy} = 4 - 3x^2 - 3y^2$, $\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$.

	$(0,0)$	$(-1,-1)$	$(-1,1)$	$(1,-1)$	$(1,1)$
f_{xx}	0	-6	6	6	-6
f_{yy}	0	-6	6	6	-6
f_{xy}	4	-2	-2	-2	-2
Δ	-16	32	32	32	32

$(0,0)$: $\Delta < 0 \Rightarrow$ eyer (dönüm) noktası. Diğerlerinde $\Delta > 0$ olup:

$(-1,-1), (1,1):\ f_{xx} = -6 < 0 \ \Rightarrow$ yerel maksimum.

$(-1,1), (1,-1):\ f_{xx} = 6 > 0 \ \Rightarrow$ yerel minimum.

6. Jakobiyen:

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2vx \\ 2u & -2 \end{vmatrix} = 2 - 4uvx.$$

$2 - 4uvx \neq 0$ olan noktalarda u ve v; x, y cinsinden çözülebilir. Bu noktalarda

$$u_x = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} 2xy + v^2 & 2vx \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}{2 - 4uvx} = \frac{4xy + 2v^2 + 2vx}{2 - 4uvx},$$

$$v_y = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} -1 & x^2 \\ 2u & -2 \end{vmatrix}}{2 - 4uvx} = \frac{-2 + 2ux^2}{2 - 4uvx}.$$

7. a) Bölge $0 \leq y \leq 1,\ 3y \leq x \leq 3$; köşeleri $(0,0),(3,0),(3,1)$ olan üçgen. $\int e^{x^2}dx$ temel fonksiyonlarla ifade edilemediğinden integrasyon sırası değiştirilir: $0 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq \frac{x}{3}$.

$$I = \int_0^3 \int_0^{x/3} e^{x^2}\,dy\,dx = \int_0^3 \frac{x}{3}e^{x^2}\,dx \overset{u=x^2}{=} \frac{1}{6}\int_0^9 e^u\,du = \frac{e^9-1}{6}.$$

b) Bölge birinci çeyrekteki birim disk ($x^2+y^2 \leq 1,\ x,y \geq 0$). Kutupsal: $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq r \leq 1,\ \sqrt{x^2+y^2} = r,\ dA = r\,dr\,d\theta$.

$$I = \int_0^{\pi/2}\int_0^1 r \cdot r\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 r^2\,dr = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{\pi}{6}.$$