1. soru	2. soru	3. soru	4. soru	5. soru	6. soru	7. soru	Toplam

Adı Soyadı:

Numara:

MAT 212 ANALİZ IV DERSİ FİNAL SINAVI SORULARI

1) $A \subset \mathbb{R}^m$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_m) \in A$ için $P_k : A \to \mathbb{R}$, $P_k(x) = x_k$ olarak tanımlanan P_k izdüşüm fonksiyonunun $(1 \le k \le m)$ sürekli olduğunu gösteriniz. **(10 Puan)**

2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ fonksiyonu veriliyor.

a) $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ için $\frac{\partial f(a,b)}{\partial x}$ kısmi türevini bulunuz. **(10 puan)**

b) f fonksiyonu sürekli midir? Neden? **(5 puan)**

3) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\frac{\partial f}{\partial u}(0,1) = \frac{1}{2}$, $\frac{\partial f}{\partial v}(0,1) = 1$ koşullarını sağlayan diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = f(x^2 - y, xy)$ olarak tanımlanıyor. $\frac{\partial g}{\partial x}(1,1) - 4\frac{\partial g}{\partial y}(1,1)$ ifadesini hesaplayınız. **(15 puan)**

4) $f(x,y) = 4xy - x^4 - y^4$ fonksiyonunun yerel maksimum ve yerel minimum noktalarını bulunuz. **(15 puan)**

5) $u(x,y) = x^2 - y^2$, $v(x,y) = 2xy$ olarak tanımlanan $f(x,y) = (u,v)$ dönüşümünün hangi koşullarda ters dönüşümünün var olduğunu gösteriniz. Bu koşullar için $\frac{\partial x}{\partial u}$ ve $\frac{\partial y}{\partial v}$ kısmi türevlerini bulunuz. **(15 puan)**

6) D bölgesi, $y = 2x - 2$, $y = 2x - 4$, $y = -x + 2$, $y = -x + 4$ doğruları ile sınırlanan bölge ise $u = x + y$ ve $v = 2x - y$ değişken değiştirmesi yaparak

$$\iint_D (2x - y)^2 \, dx dy$$

integralini hesaplayınız. **(15 puan)**

7) $x^2 + y^2 = 9$ silindiri ve $z = 1$, $x + z = 5$ düzlemleri arasında kalan bölgenin hacmini bulunuz. **(15 puan)**

Not: Süre 110 dakikadır. Başarılar.

13.06.2025

Prof. Dr. Birsen Sağır Duyar

MAT212 ANALİZ IV FİNAL SINAVI ÇÖZÜMLER

1) $a=(a_1,a_2,\dots,a_m)\in\mathbb{R}^m$ keyfi alınsın. $\forall\varepsilon>0$ verilsin.

$\|x-a\|<\delta$ olan $\forall x\in\mathbb{R}^m$ için $|P_k(x)-P_k(a)|<\varepsilon$

olacak şekilde bir $\delta>0$ bulunmalı.

$|x_k-a_k|\le\|x-a\|$ olduğundan $\delta=\varepsilon$ seçilirse

$\|x-a\|<\delta \Rightarrow |P_k(x)-P_k(a)|=|x_k-a_k|<\varepsilon$ olur.

2) a) $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{0-0}{t}=0$

$\dfrac{\partial f(a,0)}{\partial x}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(a+t,0)-f(a,0)}{t}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{0-0}{t}=0$

$\dfrac{\partial f(0,b)}{\partial x}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(t,b)-f(0,b)}{t}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\frac{tb}{t^2+b^2}-0}{t}=\dfrac{1}{b}$

$\dfrac{\partial f(a,b)}{\partial x}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(a+t,b)-f(a,b)}{t}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\frac{(a+t)b}{(a+t)^2+b^2}-\frac{ab}{a^2+b^2}}{t}$

$=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{(a^2+b^2)(a+t)b-ab(a+t)^2-abb^2}{t(a^2+b^2)[(a+t)^2+b^2]}$

$=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{-a^2bt+b^3t-abt^2}{t(a^2+b^2)[(a+t)^2+b^2]}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{b\cancel{t}(b^2-a^2-at)}{\cancel{t}(a^2+b^2)[(a+t)^2+b^2]}$

$$\boxed{\dfrac{\partial f(a,b)}{\partial x}=\dfrac{b(b^2-a^2)}{(a^2+b^2)^2}}$$

b) f, $(0,0)\in\mathbb{R}^2$ de sürekli değildir. Çünkü

$(0,\frac{1}{n})\to(0,0)\ (n\to\infty)$, $f(0,\frac{1}{n})=\dfrac{0\cdot 1/n}{0^2+\frac{1}{n^2}}\to0\ (n\to\infty)$

$(1/n,1/n)\to(0,0)\ (n\to\infty)$, $f(1/n,1/n)=\dfrac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}}=\dfrac{1/n^2}{2/n^2}\to\frac{1}{2}\ (n\to\infty)$

$0\ne1/2$ old. f, $(0,0)$ da sürekli değil.

(3) $g(x,y) = f(x^2-y, x\cdot y)$, $u = x^2-y$, $v = x\cdot y$

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad f\circ\varphi = g$$

$f(\varphi(x,y)) = f(x^2-y, xy) = g(x,y)$, $\varphi(x,y) = (x^2-y, xy)$

$\varphi(1,1) = (0,1)$

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial (f\circ\varphi)(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial f(\varphi(x,y))}{\partial u}\cdot\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(\varphi(x,y))}{\partial v}\cdot\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial f(\varphi(x,y))}{\partial u}\cdot 2x + \frac{\partial f(\varphi(x,y))}{\partial v}\cdot y$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(1,1) = \frac{\partial f(0,1)}{\partial u}\cdot 2 + \frac{\partial f(0,1)}{\partial v}\cdot 1 = \frac{1}{2}\cdot 2 + 1\cdot 1 = 1+1 = 2$$

(4) $f(x,y) = 4xy - x^4 - y^4$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 4y - 4x^3 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 4x - 4y^3\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Rightarrow 4y - 4x^3 = 0 \Rightarrow y = x^3 \\ &\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow 4x - 4y^3 = 0\end{aligned}$$

$4x - 4y^3 = 0 \Rightarrow 4x - 4(x^3)^3 = 0 \Rightarrow 4x - 4x^9 = 0$

$\Rightarrow 4x(1-x^8) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x^8 = 1 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 1$

$y = x^3 \Rightarrow y_1 = 0,\ y_2 = -1,\ y_3 = 1$

kritik noktalar $(-1,-1), (0,0), (1,1)$,

$f_{xx} = -12x^2 < 0$ $\quad \Delta = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$

$f_{yy} = -12y^2 < 0$

$f_{xy} = 4 = f_{yx}$ $\quad \Delta_{(0,0)} = f_{xx}(0,0)\cdot f_{yy}(0,0) - f_{xy}(0,0)$

$\quad = 0\cdot 0 - 16 = -16 < 0$

$$\Delta(-1,-1) = f_{xx}(-1,-1)\, f_{yy}(-1,-1) - \left[f_{xy}(-1,-1)\right]^2$$

$$= (-12)\cdot(-12) - 16 = 128 > 0$$

$f_{xx}(-1,-1) = -12 < 0 \Rightarrow$ $(-1,-1)$ y.max.

$\Delta(1,1) = f_{xx}(1,1)\cdot f_{yy}(1,1) - \left(f_{xy}(1,1)\right)^2 = (-12)(-12) - 16 = 128$

$(1,1)$, y.max.

⑤ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (u,v)$ $\quad u = x^2 - y^2,\ v = 2xy$

$$J_f = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ +2y & 2x \end{vmatrix} = 4(x^2+y^2) \neq 0$$

olmalı

$(x,y) \neq (0,0)$ koşulunu sağlayan tüm noktalarda ters dönüşümü mevcuttur.

$\frac{\partial x}{\partial u} = ?$ $\quad \frac{\partial y}{\partial v} = ?$ $\quad J_{f^{-1}}(x,y) = J_f^{-1}(u,v)$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det J_f} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial y} & -\frac{\partial v}{\partial x} \\ -\frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{bmatrix}^t$$

$$= \frac{1}{\det J_f} \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial y} & -\frac{\partial u}{\partial y} \\ -\frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{bmatrix} = \frac{1}{4(x^2+y^2)} \begin{bmatrix} 2x & -(-2y) \\ -2y & 2x \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4(x^2+y^2)} \cdot \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ -2y & 2x \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{4(x^2+y^2)} \cdot 2x, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{2x}{4(x^2+y^2)}$$

⑥ $\begin{cases} y = 2x - 2 \Rightarrow 2 = 2x - y \Rightarrow v = 2 \\ y = 2x - 4 \Rightarrow 4 = 2x - y \Rightarrow v = 4 \end{cases}$

$y = -x + 2 \Rightarrow 2 = x + y \Rightarrow u = 2$

$y = -x + 4 \Rightarrow 4 = x + y \Rightarrow u = 4$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = -\frac{1}{3}$$

$$\iint_{D_{xy}} (2x-y)^2\,dx\,dy = \frac{1}{3} \int_2^4 \int_2^4 v^2\,dv\,du = \frac{112}{9}$$

⑦ $$\int_{-3}^{3} \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_{1}^{5-x} dz\,dy\,dx = \int_{-3}^{3} \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} z \Big|_1^{5-x} dy\,dx =$$

$$= \int_{-3}^{3} \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} (4-x)\,dy\,dx = \int_{-3}^{3} (8-2x)\sqrt{9-x^2}\,dx = 8\int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\,dx - \int_{-3}^{3} 2x\sqrt{9-x^2}\,dx$$

$$= 8\left(\frac{9}{2}\pi\right) - 0 = 36\pi$$