

Ad-Soyad :
Numara :

Cevap Anahtarı

Öklidyen Olmayan Geometri Arasınay Soruları

11.04.2026

NOT: Her soru 20 puan olup süre 90 dakikadır. Başarılar dilerim.

- 1) Düzlemde $X = (1, 2)$ noktasının $m = (0, 1) + [(3, 4)]$ doğrusuna göre yansımasını bulunuz.
- 2) Düzlemde m ve n paralel doğrular olmak üzere $k = \left\{ \frac{1}{2}(X + Y) : X \in m, Y \in n \right\}$ kümesi veriliyor.
 - a) k kümesinin m ve n doğrularına paralel bir doğru olduğunu gösteriniz.
 - b) k ile m doğruları arasındaki uzaklığın k ile n doğruları arasındaki uzaklığa eşit yani $d(k, m) = d(k, n)$ olduğunu gösteriniz.
- 3) S^2 de kutbu $h = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$ olan m doğrusu ile kutbu $k = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$ olan n doğrusunun kesim noktalarını bulunuz.
- 4) S^2 de $P = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$, $Q = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ noktaları veriliyor.
 - a) S^2 de P ve Q noktaları arasındaki uzaklığı bulunuz.
 - b) S^2 de P ve Q noktalarından geçen doğruyu bulunuz.
- 5) S^2 de $P = (0, 1, 0)$, $Q = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ ve $R = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ noktalarının aynı doğru üzerinde olup olmadığını belirleyiniz.

1) $X \in E^2$ noktasının $L = P + [v]$ doğrusuna göre yansıması $\mathcal{R}_L X = X - 2 \langle X - P, N \rangle N$ dir. Burada N , L nin birim normal vektörüdür.

$$N = \frac{v^\perp}{|v^\perp|} = \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_L X &= X - 2 \langle X - P, N \rangle N = (1, 2) - 2 \langle \underbrace{(1, 2) - (0, 1)}_{(1, 1)}, \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) \rangle N \\ &= (1, 2) + \frac{2}{5} \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) = (1, 2) + \left(-\frac{8}{25}, \frac{6}{25}\right) = \left(\frac{17}{25}, \frac{56}{25}\right) \end{aligned}$$

2) m ve n paralel doğrular $\Rightarrow m = P + [v], n = Q + [v]$

a) $\forall z \in k$ alalım. k nin tanımına göre $z = \frac{1}{2}(x + y)$ olacak şekilde $x \in m, y \in n$ vardır.

$x \in m \Rightarrow x = P + t_1 v$ olacak şekilde $t_1 \in \mathbb{R}$ vardır.

$y \in n \Rightarrow y = Q + t_2 v$ " " $t_2 \in \mathbb{R}$ "

$$\Rightarrow z = \frac{1}{2}(x + y) = \frac{1}{2}(P + t_1 v + Q + t_2 v)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}(P + Q)}_{\in \mathbb{R}^2} + \underbrace{\frac{1}{2}(t_1 + t_2)}_{\in \mathbb{R}} v$$

$R = \frac{1}{2}(P + Q)$ dersen $z \in k$ noktaları $z = R + tv$ şeklinde dir. O halde, k kümesi v doğrultumlu bir doğru olup m ve n doğrularına paraleldir.

b) m ve n doğrularının birim normal vektörü N olsun. $X \in m, Y \in n$ olmak üzere $\forall Z = \frac{1}{2}(X+Y)$ ek alalım.

$$d(k, m) = |\langle Z - X, N \rangle| = |\langle \frac{1}{2}(X+Y) - X, N \rangle|$$

$$= |\langle \frac{1}{2}(Y-X), N \rangle|$$

$$d(k, n) = |\langle Z - Y, N \rangle| = |\langle \frac{1}{2}(X+Y) - Y, N \rangle|$$

$$= |\langle \frac{1}{2}(X-Y), N \rangle| = |\langle \frac{1}{2}(Y-X), N \rangle|$$

$$\Rightarrow d(k, m) = d(k, n)$$

3) Arakesit noktaları $P = \mp \frac{h \times k}{|h \times k|}$ dir.

$$h \times k = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = \left(-\frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$$

$$|h \times k| = \sqrt{\frac{4}{10} + \frac{4}{10} + \frac{1}{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \Rightarrow P = \mp \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$4) a) d(P, Q) = \arccos \langle P, Q \rangle = \arccos \left\langle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\rangle$$

$$= \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$

b) P ve Q dan geçen doğru $h = \mp \frac{P \times Q}{|P \times Q|}$ kutuplu

doğrudur.

$$P \times Q = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{vmatrix} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$|P \times Q| = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = \frac{P \times Q}{|P \times Q|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

5) S^2 de P, Q, R aynı doğru üzerindedir

$$\Leftrightarrow \det(P, Q, R) = 0$$

$$\det(P, Q, R) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow P, Q, R$ noktaları aynı doğru üzerindedir