

Ad-Soyad:

Numara:

CEBİR I BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI

- 1) a) 4147 ve 10672 sayılarının obeblerini Öklid Algoritması yoluyla bulunuz.
 b) $m \in \mathbb{N}$ için $2^m - 1$ sayısı asal ise m nin asal olduğunu gösteriniz.
- 2) $G = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ kümesi üzerinde $*$ işlemi $\forall (a, b), (c, d) \in G$ için

$$(a, b) * (c, d) = (ac, b + d)$$

şeklinde tanımlanıyor. $(G, *)$ ikilisi bir gruptur.

- a) Birimini bulunuz.
 b) $(a, b) \in G$ nin tersini bulunuz.
 c) Mertebesi iki olan bir eleman bulunuz.
 d) Mertebesi üç olan eleman olmadığını gösteriniz.

- 3) $H = \{(2a, 2^b) \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ kümesi üzerinde \circ işlemi $\forall (2a, 2^b), (2c, 2^d) \in H$ için

$$(2a, 2^b) \circ (2c, 2^d) = (2a + 2c - 2, 2^{bd})$$

şeklinde tanımlanan (H, \circ) bir gruptur.

$$f: H \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$(2a, 2^b) \rightarrow f(2a, 2^b) = 3a + 2b - 1$$

şeklinde f fonksiyonu verilsin.

- a) f nin bir grup homomorfizması olduğunu gösteriniz.
 b) $\text{Çek}f$ i bulunuz.

- 4) G bir grup ve $x \in G$ olsun. $\forall x \in G$ için $f_x(y) = xyx^{-1}$ fonksiyonunun G nin bir otomorfizması olduğunu gösteriniz.

- 5) a) \mathbb{Z}_{41}^* grubunda 5 elemanın mertebesini bulunuz.

- b) S_{11} permütasyon grubu için $\sigma = (3146782)(59)(738)$ permütasyonunun mertebesini ve σ^{-1} i bulunuz.

İPTAL

BAŞARILAR

Cevap Anahitari

$$\begin{aligned}
 1 \quad a) \quad 10672 &= 2 \cdot 4147 + 2378 \\
 4147 &= 1 \cdot 2378 + 1769 \\
 2378 &= 1 \cdot 1769 + 609 \\
 1769 &= 2 \cdot 609 + 551 \\
 609 &= 1 \cdot 551 + 58 \\
 551 &= 9 \cdot 58 + \textcircled{29} \\
 58 &= 2 \cdot 29 + 0
 \end{aligned}$$

b) kabul edelimki m asal olmasın. O halde $m = \pi \cdot y$, $1 < \pi, y < m$ olacak şekilde $\pi, y \in \mathbb{N}$ var.

$$2^m - 1 = 2^{\pi y} - 1 = (2^\pi)^y - 1 = (2^\pi - 1) \left((2^\pi)^{y-1} + \dots + 2^\pi + 1 \right)$$

olup $2^m - 1$ asal olmaz. kabul yanlış, m asaldır.

2-) a) $(a, b) \times (\pi, y) = (a, b)$ $\pi = 1, y = 0$ bulunur

$$e = (1, 0)$$

b) $(a, b)^{-1} = \left(\frac{1}{a}, -b \right)$ bulunur.

c) $(a, b) \times (a, b) = (a^2, 2b) = (1, 0)$ $a = \pm 1, b = 0$

$(-1, 0)$ bulunur.

d) $(a, b) \times (a, b) \times (a, b) = (a^3, 3b) = (1, 0)$ $a = 1, b = 0$

olup birimdir. mertebesi 4'ü olan el. yoktur.

~~3-) a) $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{Z}$~~

~~$(2a, 2^b) \rightarrow f(2a, 2^b) = 3a + 2^b - 1$~~

~~$\forall (2a, 2^b), (2c, 2^d) \in \mathbb{H}$ için~~

~~$f[(2a, 2^b) \circ (2c, 2^d)] = f(2a + 2c - 2, 2^{b+d})$~~

~~$= f(2(a+c-1), 2^{b+d+1})$~~

b) ~~$\text{Görf} = \{(2a, 2^b) \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ ve}$~~

~~$3a + 2^b = 1\}$~~

~~bulunur.~~

~~$= 3(a+c-1) + (2^{b+d+1} - 1)$~~

~~$= 3a + 2^b - 1 + (3c + 2^d - 1)$~~

~~$= f(2a, 2^b) + f(2c, 2^d)$~~

~~bulunur.~~

$$4- f: G \rightarrow G$$

$$y \rightarrow f_n(y) = ny\bar{n}^{-1}$$

i) f homomorfizmadir.

$$\begin{aligned} \forall \forall y, z \in G \text{ için } f_n(y \cdot z) &= n(yz)\bar{n}^{-1} \\ &= n(y(\bar{n}^{-1}n)z)\bar{n}^{-1} \\ &= (ny\bar{n}^{-1})(nz\bar{n}^{-1}) \\ &= f_n(y) f_n(z) \end{aligned}$$

$$\text{ii) } f_n(y) = f_n(z) \Rightarrow$$

$$ny\bar{n}^{-1} = nz\bar{n}^{-1} \Rightarrow n=y \text{ 1-1 dir}$$

$$\text{iii) } \forall z \in G \text{ için } f_n(y) = z \Rightarrow ny\bar{n}^{-1} = z$$

ol. Şek. $\exists y \in G$ vardır. Ürten

$$5- a) 5^1=5, 5^2=25, 5^3=2, 5^4=10, 5^5=9, 5^6=4$$

$$5^7=20, 5^8=18, 5^9=8, 5^{10}=-1, 5^{11}=-5, 5^{12}=16$$

$$5^{13}=-2, 5^{14}=-10, 5^{15}=32, 5^{16}=37, 5^{17}=21, 5^{18}=23$$

$$5^{19}=33, 5^{20}=1, o(5)=20$$

$$b) \text{ sim } \sigma = (3146782)(59)(738)$$

$$\sigma = (1467)(23)(59)$$

$$o(\sigma) = \text{oketk}(4, 2, 2) = 2$$

$$\sigma^{-1} = (7641)(23)(59) \text{ bulunur.}$$