Ad-Soyad: Cevap Anahtarı
Numara:

27.06.2024

CEBİR II FİNAL SINAVI SORULARI

1) **a)** $R=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c\end{bmatrix} : a,b,c\in\mathbb{Z}\right\}$ kümesi matrislerde tanımlanan toplama ve çarpma işlemleriyle bir halkadır. $M=\left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix} : a\in\mathbb{Z}\right\}$ kümesi R nin bir ideali midir?

b) $f(x)=x^2+\bar{2}x+\bar{2}\in\mathbb{Z}_3[x]$ polinomu veriliyor. $P=\langle f(x)\rangle$ ideali için $\mathbb{Z}_3[x]/P$ bölüm halkasının elemanlarını belirleyiniz.

2) **a)** $\mathbb{Z}/42\mathbb{Z}$ bölüm halkasının bütün ideallerini ve varsa maksimal ideallerini bulunuz.

b) $f(x)=11x^4+44x^3+91x^2+79x+31\in\mathbb{Z}[x]$ polinomu asal mıdır?

3) **a)** $5+i$ ve $5+3i$ Gauss tam sayılarının en büyük ortak bölenlerini Öklid algoritması yoluyla bulunuz..

b) $-24+23i$ Gauss tam sayısını asal çarpanlarına ayırınız.

4) $f(x)=x^5+5x^4+6x^3+x^2+5x+6$ ve $g(x)=x^3+2x^2+2x+1$ polinomları $\mathbb{Q}[x]$ te veriliyor. En büyük ortak bölenlerini bulunuz. $d(x)=(f(x),g(x))$ ise $d(x)=h(x)f(x)+k(x)g(x)$ yapan $h(x),k(x)\in\mathbb{Q}[x]$ leri bulunuz.

5) **a)** H halkası Öklid bölgesi ise temel ideal bölgesidir, ispatlayınız.

b) R değişmeli halka olsun. P, R nin kendinden farklı ideali olsun. R/P tamlık bölgesi ise P nin asal olduğunu gösteriniz.

BAŞARILAR

1 a) $R=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c\end{bmatrix} \middle| \, a,b,c \in \mathbb{Z}\right\}$

$M=\left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{Z}\right\}$ $M \neq \emptyset$ Açık

$\forall \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix} \in M$ için

$\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1-a_2 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix} \in M$ dir. $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$

$\forall \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c\end{bmatrix} \in R$ ve $\forall \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix} \in M$ için

$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa_1 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix} \in M$ sol ideal

$\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1a & a_1b \\ 0 & 0\end{bmatrix} \notin M$ sağ ideal değil

ideal değil

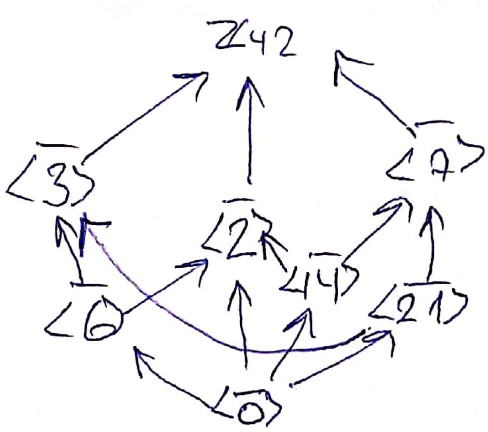
b) $\mathbb{Z}_3[x]/P = \{ a_0 + a_1x + P \mid a_0, a_1 \in \mathbb{Z}_3 \}$

$\mathbb{Z}_3[x]/P = \{ P,\ \bar{1}+P,\ \bar{2}+P,\ x+P,\ \bar{1}+x+P,\ \bar{2}+x+P,$
$2x+P,\ \bar{1}+\bar{2}x+P,\ \bar{2}+\bar{2}x+P \}$ olur.

2-a) $\mathbb{Z}/42\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_{42}$

Tüm idealler $\langle\bar{0}\rangle, \langle\bar{2}\rangle, \langle\bar{3}\rangle, \langle\bar{6}\rangle, \langle\bar{7}\rangle, \langle\bar{14}\rangle,$
$\langle\bar{21}\rangle$, $\mathbb{Z}_{42} = \langle\bar{1}\rangle$

$\langle\bar{3}\rangle, \langle\bar{2}\rangle, \langle\bar{7}\rangle$ maksimal idealler.



2-b) $f(x) = 11x^4 + 44x^3 + 91x^2 - 79x + 31 \Rightarrow$

$f(x-1) = 11x^4 + 25x^2 - 15x + 10$ olup $\Pi = 5$ alınırsa $5 \mid 10, -15, 25$, $5 \nmid 11$, $25 \nmid 10$ olup asaldır.

3-a) $5+3i = 1.(5+i) + 2i$

$5+i = -2i(2i) + (1+i)$ obeb

$2i = (1+i)(1+i)$

b) $-24+23i = (2+i)(3+2i)(1+4i)$ dir.

4- ① $f(x) \mid g(x)$, bölüm x^2+3x-2, kalan $-2x^2+6x+8$

② $g(x) \mid -2x^2+6x+8$, bölüm $-\frac{1}{2}x - 5/2$, kalan $21x+21$

③ $-2x^2+6x+8 \mid 21x+21$, bölüm $-\frac{2}{21}x + 8/21$, kalan 0

obeb $= 21x+21$

$f(x) = (x^2+3x-2)\,g(x) + -2x^2+6x+8$

$g(x) = (-\frac{1}{2}x - 5/2)(-2x^2+6x+8) + (21x+21)$

$21x+21 = (\frac{1}{2}x + \frac{5}{2})\,f(x) + (-\frac{x^3}{2} - 4x^2 - \frac{13x}{2} + 6)\,g(x)$

5- a) Defterinizde mevcut

b) " "