Cevap Anahtarı 07.04.2025

Cebir II Vize Soruları

1- a) Boole halkasını tarif edip, değişmeli olduğunu ispatlayınız. (10)

b) $R \neq \{0_R\}$ regüler halka olsun. R'nin her x elemanı için $x = xyx$ olacak şekilde bir tek $y \in R$ varsa R'nin sıfır bölensiz olduğunu ispatlayınız. (10)

2- R halkasının bir I idealine göre tanımlanan denklik sınıfları için $a+I, b+I \in R/_I$ için $(a+I)+(b+I)=(a+b)+I$, $(a+I)\cdot(b+I)=a.b+I$ ile tanımlanan + ve • işlemlerinin iyi tanımlı olduğunu gösteriniz. (10+10)

3- a) R bir halka, $\forall x \in R$ için $x^3 = x$ olsun. $\forall x \in R$ için $6x = 0_R$ olduğunu gösteriniz. (10)

b) $\mathbb{Z}_{10}$ halkası için $f: \mathbb{Z}_{10} \to \mathbb{Z}_{10}$, $\forall \bar{a} \in \mathbb{Z}_{10}$, $f(\bar{a}) = 5.\bar{a}$ ile tanımlı f fonksiyonunun halka homomorfizması olduğunu gösterip, Çek$f$ ve $f(\mathbb{Z}_{10})$ kümelerini bulunuz. (5+2,5+2,5)

4- a) $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{Z}_6 \right\}$ kümesi matrislerde tanımlanan toplama ve çarpma işlemleriyle bir halkadır. Bütün idempotent elemanlarını bulunuz. (10)

b) A ve B değişmeli bir R halkasının iki ideali olsun. $I = \{ r \in R \mid ra \in A, (\forall a \in B \text{ için})\}$ kümesi R'nin bir idealidir, gösteriniz. (10)

5- a) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ kümesi üzerinde $\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ için $(a,b)+(c,d)=(a+c, b+d)$, $(a,b)\cdot(c,d)=(ac, bd)$ işlemleriyle $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ bir halkadır, sıfır bölensiz midir? (10)

b) R bir Boole halkası olsun. $\forall x,y,z \in R$ için $(x+y)(y+z)(z+x) = 0_R$ olduğunu gösteriniz. (10)

Başarılar dilerim

1- a) Defterinizde var

b) " "

2- Defterinizde var

4- b) Defterinizde var.

3- a) $(x+x)^3 = x+x$

$(x+x)(x+x)(x+x) = (x+x)(x^2+x^2+x^2+x^2) = (x+x)$

$= x^3+x^3+x^3+x^3+x^3+x^3+x^3+x^3 = x+x$

$= x+x+x+x+x+x+x+x = x+x$

$= x+x+x+x+x+x = 0_R$

$\Rightarrow 6x = 0_R$ bulunur.

b) $f: \mathbb{Z}_{10} \longrightarrow \mathbb{Z}_{10}$

$\bar{a} \longrightarrow f(\bar{a}) = 5\bar{a}$

$\forall \bar{a},\bar{b} \in \mathbb{Z}_{10}$ için $f(\bar{a}+\bar{b}) = f(\overline{a+b}) = 5(\overline{a+b}) = \overline{5(a+b)}$

$= \overline{5a+5b} = \overline{5a} + \overline{5b}$

$= 5\bar{a} + 5\bar{b}$

$= f(\bar{a}) + f(\bar{b})$

$f(\bar{a}\cdot\bar{b}) = f(\overline{a\cdot b}) = 5\cdot(\overline{a\cdot b}) = 25(\overline{a\cdot b})$

$= \overline{25(ab)} = \overline{5a}\cdot\overline{5b} = 5\bar{a}\cdot 5\bar{b}$

$= f(\bar{a})f(\bar{b})$

$\mathrm{Ker} f = \{\bar{0},\bar{2},\bar{4},\bar{6},\bar{8}\}$ $\quad f(\mathbb{Z}_{10}) = \{\bar{0},\bar{5}\}$

4- a) $\forall \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \in R$ için $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$ yapan elemanlar

$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \Rightarrow a^2 = a \quad 2ab = b$

buradan $\begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{3} & \bar{0} \\ 0 & \bar{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{4} & \bar{0} \\ 0 & \bar{4} \end{bmatrix}$ idempotent elemanlardır.

5- a) $(1,0)$ ve $(0,1)$ elemanları toplamsal birim olan $(0,0)$ dan farklıdır. $(1,0)(0,1) = (0,0)$ olup sıfır bölenlidir.

b) R Boole halkası olduğundan değişmeli ve $\forall x \in R$ için $x = -x$ olup

$(x+y)(y+z)(z+x) = (x+y)(yz+yx+z^2+zx)$

$= (x+y)(yz+yx+z+zx)$

$= (x+y)(\cancel{xyz}+x^2y+xz+x^2z+y^2z+y^2x+yz+\cancel{xyz})$

$= \cancel{xyz}+x^2y+xz+x^2z+yz+\cancel{xy}+yz$

$= 2xyz+2xy+xz+xz+yz+xy+yz$

$= 2xyz+2xy+2xz+2yz$

$= 0_R \quad (\mathrm{kar}\, R = 2$ olduğundan$)$