

MAT 205 DİFERANSİYEL DENKLEMLER I ARA SINAV SORULARI

1. (10p) $1 dy + \left(3y + \frac{8}{y^3}\right) dx = 0$ denklemi için aşağıdakilerden hangisi/hangileri doğrudur?

- +I. değişkenlerine ayrılabilir denklemdir —II. tam diferansiyel denklemdir $M_y = 3 - 24y^{-4} \neq N_x = 0$
—III. linear diferansiyel denklemdir +IV. Bernoulli diferansiyel denklemdir $y' + 3y = -\frac{8}{y^3}$ $n = -3$
a) I b) IV c) I, III d) II, IV **(e) I, IV**

2. (10p) Aşağıdaki eşleştirmelerden hangisi yanlıştır?

- a) $y'' + 3y = 0$: 2.mertebe-linear-homojen b) $xy''' - 2y'' - 1 = 0$: 3.mertebe-linear-homojen değil
c) $e^x y'' - \frac{1}{x} y' - y = 0$: 2.mertebe-linear-homojen **(d) $y'' - 2y' = 3y^2$** : 2.mertebe-linear-homojen değil
e) $y^{(4)} - y' \sin x + \cos y = e^x$: 4.mertebe-linear değil-homojen değil

3. (10p) Aşağıdakilerden hangisi tam diferansiyel denklemdir?

- (a) $\sqrt{y} dx + \frac{x}{2\sqrt{y}} dy = 0$** b) $(xy + 4) dx + x^2 dy = 0$ c) $(y^2 - 2) dx - 3x dy = 0$
d) $(y^2 - x^2) dx - 2xy dy = 0$ e) $\frac{3}{y} dx + \frac{x+3}{y^2} dy = 0$

4. (10p) Aşağıdakilerden kaç tanesi (sıfırıncı dereceden) homojen diferansiyel denklemdir?

- +I. $y' = \sin\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x^2}$ —II. $y' = \ln\left(\frac{y}{x}\right) + e^x$ +III. $(y^2 + x^2) dx + 2xy dy = 0$
—IV. $(x^2 + 1) dx + (3x + 5) dy = 0$ +V. $\sqrt{xy} dx - (x + y) dy = 0$

a) 1 b) 2 **(c) 3** d) 4 e) 5

5. (10p) Aşağıdakilerden hangisi Riccati diferansiyel denklemdir?

- a) $y' - \frac{y}{x} = \frac{y}{x}$ b) **$y' - xy^2 = \sin x + 2y$** c) $(x^2 - 1)y' + xy^2 = y^3 - 1$
d) $y' - \frac{y}{x} = \frac{2}{y} - e^x$ e) $y' - x^3 = (e^y - 2)y$

6. (10p) $y' - 2 = \frac{1}{x-y}$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$$y' = 2 + \frac{1}{x-y} \Rightarrow y' = \frac{2x - 2y + 1}{x-y} \quad \begin{matrix} a_1 = 2 & b_1 = -2 & c_1 = 1 & a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0 \\ a_2 = 1 & b_2 = -1 & c_2 = 0 & \end{matrix} \quad (3-a \text{ özelliği})$$

pay ve paydadada ortak olan $x-y = u$ dusek $1-y' = u' \rightarrow y' = 1-u'$
dur. Benzer denklemlerde yerlerine yazılırsalar

$$1-u' = \frac{2u+1}{u}$$

$$1 - \frac{2u+1}{u} = u'$$

$$\frac{-u-1}{u} = \frac{du}{dx}$$

$$\int \frac{u}{u+1} du = \int dx \quad \text{DA olur.}$$

$$\int \left(1 - \frac{1}{1+u}\right) du = \int dx$$

$$u - \ln(1+u) = -x + c$$

$$x-y - \ln(1+x-y) = -x + c$$

(20p) $xyy' + 3x = y^2$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

1. adım $y' + \frac{3}{y} = \frac{y}{x}$
 $y' - \frac{1}{x}y = -\frac{3y}{x}$, $n = -1$

Bernoulli denklemdir.

$u = y^{1-n} \rightarrow u = y^2 \rightarrow u' = 2yy'$ dir.

Denklem $2y$ ile çarpılırsa

$2yy' - \frac{2}{x}y^2 = -6$

$u' - \frac{2}{x}u = -6$ lineer denklemdir.

$\lambda(x) = e^{\int -\frac{2}{x} dx} = e^{-2 \ln x} = \frac{1}{x^2}$ için

$\frac{1}{x^2} \cdot u = \int \frac{1}{x^2} (-6) dx + c$

$\frac{u}{x^2} = \frac{6}{x} + c \rightarrow u = 6x + cx^2$ dir.

$u = y^2$ olduktan $y^2 = 6x + 6cx^2$
 fonksiyondur.

8. (20p) $cy^2 = 1 - x^2$ eğri ailesinin dik yörüngelerini bulunuz.

1. adım dik denklemleri bulalım

$cy^2 = 1 - x^2$ 14 c ≠ 0 alınırsa

$2cyy' = -2x \rightarrow c = -\frac{x}{yy'}$ olup

$cy^2 = 1 - x^2$ de yerine yazılırsa

$y^2 \left(-\frac{x}{yy'}\right) = 1 - x^2 \rightarrow -\frac{xy}{y'} = 1 - x^2$

eğri ailesinin dik denklemdir.

2. adım: Dik yörünge için $y' + \frac{-1}{y}$ yazılırsa

$\frac{-xy}{-1 \cdot y'} = 1 - x^2 \rightarrow xyy' = 1 - x^2$

dik yörünge dik denklemler elde edilir.

3. adım: Bu denklemler ayrılabilirse

$xyy' = 1 - x^2 \rightarrow xy \frac{dy}{dx} = 1 - x^2 \rightarrow \int y dy = \int \frac{1 - x^2}{x} dx$ DA dir

$\int y dy = \int \left(\frac{1}{x} - x\right) dx$

$\frac{y^2}{2} = \ln x - \frac{x^2}{2} + a, a \in \mathbb{R}$

istenen dik yörüngelendir

Cevap Anahatları
 2. adım $\int xy dy + \int (1 - x^2) dx = 0$

yazılırsa

$M_y = -2y \neq N_x = y$ 70 denklemdir

$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{-2y - y}{xy} = -\frac{3}{x}$ sadece x e

böyle olduktan $\lambda(x) = e^{\int -\frac{3}{x} dx} = \frac{1}{x^3}$

integral çarpandır. Denklem her iki

çarpılırsa tam diferansiyeldir. Burada

$\frac{y}{x^2} dy + \left(\frac{1}{x^2} - \frac{y^2}{x^3}\right) dx = 0$

$\frac{y}{x^2} dy + \frac{1}{x^2} dx - \frac{y^2}{x^3} dx = 0$

$\int d\left(\frac{y^2}{2x^2}\right) + \int \frac{1}{x^2} dx = \int 0$

$\frac{y^2}{2x^2} - \frac{1}{x} = c$

$y^2 = 6x + 2cx^2$ parabol ailesidir

Cevap Anahtarı

MAT 205 DİFERANSİYEL DENKLEMLER I ARA SINAV SORULARI

1. (10p) $\underbrace{\left(dy + \left(2y - \frac{5}{y^3} \right) dx \right)}_N = 0$ denklemi için aşağıdakilerden hangisi/hangileri doğrudur?

+ I. değişkenlerine ayrılabilir denklemdir — II. tam diferansiyel denklemdir $M_y = 2 + 15y^{-4} \neq N_x = 0$

+ III. Bernoulli diferansiyel denklemdir $y' + 2y = \frac{5}{y^3}$ — IV. lineer diferansiyel denklemdir —

a) I b) IV $y' + 2y = \frac{5}{y^3}$ c) II, IV **(d)** I, III e) I, IV

2. (10p) Aşağıdaki eşleştirmelerden hangisi yanlıştır?

a) $y'' + 3y = 0$: 2.mertebe-lineer-homojen **(b)** $y'' - 2y' = 3y$: 2.mertebe-lineer-homojen değil
 satır x 1. terim yok

c) $e^x y'' - \frac{1}{x} y' - y = 0$: 2.mertebe-lineer-homojen d) $xy''' - 2y'' - 1 = 0$: 3.mertebe-lineer-homojen değil

e) $y^{(4)} - y' \sin x + \cos y = e^x$: 4.mertebe-lineer değil-homojen değil

3. (10p) Aşağıdakilerden hangisi tam diferansiyel denklemdir?

a) $\sqrt{y} dx + \frac{x}{\sqrt{y}} dy = 0$ $\frac{1}{2\sqrt{y}} \neq \frac{1}{\sqrt{y}}$ b) $(xy + 4) dx + x^2 dy = 0$ $x \neq 2x$ c) $(y^2 - 2) dx - 3xy dy = 0$ $2y \neq -3$

d) $(y^2 - x^2) dx - 2xy dy = 0$ $2y \neq -2y$ **(e)** $\frac{1}{y} dx + \frac{3-x}{y^2} dy = 0$ $-\frac{1}{y^2} = \frac{1}{y^2}$

4. (10p) Aşağıdakilerden kaç tanesi (sıfırıncı dereceden) homojen diferansiyel denklemdir?

+ I. $y' = \sin\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x^2}$ $f(x,y)$ için $f(x,y) = f\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}\right)$ olması
 — II. $y' = \frac{\ln y + e^x}{x-y}$ + III. $(y^2 + x^2) dx + 2xy dy = 0$

— IV. $(x^2 + 1) dx + (3x + 5) dy = 0$ + V. $(x + y) dx - \sqrt{xy} dy = 0$

a) 1 b) 2 **(c)** 3 d) 4 e) 5

5. (10p) Aşağıdakilerden hangisi Riccati diferansiyel denklemdir?

(a) $y' - xy^2 - x = \frac{y}{x}$ $y' - \frac{1}{x}y = xy^2 + x$ $y' + p(x)y = q(x)y^2 + r(x)$
 b) $y' - xy^2 = (\sin x + 2)y^{-1}$
 c) $(x^2 - 1)y' + xy^2 = y^3 - 1$ $y' + \frac{x}{x^2-1}y^2 = \frac{1}{x^2-1}y^3 - \frac{1}{x^2-1}$
 d) $y' - \frac{y}{x} = \frac{2}{x}e^x$
 e) $y' - x^3 = e^{x^2}$

6. (10p) $y' - 2 = \frac{1}{x-y}$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Diferansiyel denklemlerin çözümleri A grubunun cevap

anahtarında verildi.

