Adı Soyadı:

Numarası: 29.04.2024

MAT206 DİFERANSİYEL DENKLEMLER II ARA SINAV SORULARI

1. $y(x)=c_1x+c_2+c_3e^{x}+c_4e^{-3x}+5c_5e^{x}+2+x^2$ genel çözümüne karşılık gelen diferansiyel denklem için aşağıdaki ikililerden **DOĞRU** olanı daire içine alınız.

I. 4.mertebedendir / 5.mertebedendir **II.** sabit katsayılıdır / değişken katsayılıdır

III. homojendir / homojen olmayandır **IV.** $T=\{1,x,e^x,e^{-3x},x^2\}$ / $T=\{1,x,e^x,e^{-3x}\}$

2. $y'''-2y''=3e^{2x}-1$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

3. $y'''-y'=\cos x$ denkleminin $y(0)=0,\ y'(0)=0,\ y''(0)=1$ koşullarını sağlayan çözümünü bulunuz.

4. $y''-4y'+4y=\dfrac{e^{2x}}{x^2}$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

5. Temel çözüm kümesi $T=\{1,\ 2x,\ x^2\}$ olan diferansiyel denklemi bulunuz.

Başarılar.... **Doç. Dr. Fatma HIRA**

Cevap Anahtarı

① $y=c_1x+c_2+c_3e^x+c_4e^{-3x}+5c_5e^x+2+x^2$ çözümü aslında

$y=\underbrace{a_1+a_2x+a_3e^x+a_4e^{-3x}}_{y_h}+\underbrace{x^2}_{y_ö}$ formundadır, $a_1,a_2,a_3,a_4\in\mathbb{R}$

4 keyfi sabit var

$T=\{1,x,e^x,e^{-3x}\}$ → $\lambda^2(\lambda-1)(\lambda+3)=0$ → $\lambda^2(\lambda^2+2\lambda-3)=0$

$\lambda^2=0$ $\lambda=1$ $\lambda=-3$

→ $\lambda^4+2\lambda^3-3\lambda^2=0$

$y^{(4)}+2y'''-2y''=0$

② $y'''-2y''=3e^{2x}-1$

$y'''-2y''=0$

$\lambda^3-2\lambda^2=0$

$\lambda^2(\lambda-2)=0$

$\lambda_1=\lambda_2=0\to y_1=1,\ y_2=x$

$\lambda_3=2\to y_3=e^{2x}$

$\boxed{y_h=c_1+c_2x+c_3e^{2x}}$

$B(x)=3e^{2x}$ için TOY ile

$y_{ö_1}=\dfrac{1}{D^3-2D^2}3e^{2x}=\dfrac{1}{D^2(D-2)}3e^{2x}=\dfrac{3}{4}\dfrac{1}{D-2}e^{2x}$

$=\dfrac34e^{2x}\dfrac{1}{D+2-2}1=\dfrac34e^{2x}\dfrac1D1=\dfrac34e^{2x}x$

$B(x)=-1$ için BKY ile

$S=\{\cancel{1}\}$ T ile ortak olduğundan $S=\{\cancel{x}\}\to S=\{x^2\}$ alınırsa $y_{ö_2}=Ax^2$, $A=?$

$y_{ö_2}'=2Ax$, $y_{ö_2}''=2A$, $y_{ö_2}'''=0$

$y_{ö_2}'''-2y_{ö_2}''=-1\to-4A=-1\to A=\frac14\to y_{ö_2}=\frac14x^2$ bulunur.

$\Longrightarrow y=c_1+c_2x+c_3e^{2x}+\frac34xe^{2x}+\frac14x^2$

(3) $y''' - y' = \cos x$ TOY ile $y^* = ?$

$y''' - y' = 0$

$\lambda^3 - \lambda = 0$

$\lambda(\lambda^2 - 1) = 0$

$\lambda(\lambda-1)(\lambda+1) = 0$

$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = -1$

$y_1 = 1 \quad y_2 = e^x \quad y_3 = e^{-x}$

$y_h = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x}$

$y_* = \frac{1}{D^3 - D} \cos x = \frac{1}{D.\underbrace{D^2}_{-1} - D} \cos x$ $\quad a = 1,\ D^2 \to -1$

$= -\frac{1}{2D} \cos x = -\frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{1}{D}}_{\text{integral}} \cos x$

$= -\frac{1}{2} \sin x$

genel çözüm $y = y_h + y_*$

$\boxed{y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} - \frac{1}{2}\sin x}$

$y(0) = 0 \to 0 = c_1 + c_2 + c_3$

$y' = c_1 e^x - c_3 e^{-x} - \frac{1}{2}\cos x$, $y'(0) = 0 \to 0 = c_1 - c_3 - \frac{1}{2} \to c_1 - c_3 = \frac{1}{2}$

$y'' = c_1 e^x + c_3 e^{-x} + \frac{1}{2}\sin x$, $y''(0) = 1 \to 1 = c_1 + c_3 \quad \to \quad c_1 + c_3 = 1$

$2c_1 = \frac{3}{2} \to c_1 = \frac{3}{4}$

$c_3 = \frac{1}{4}$

$0 = \frac{3}{4} + c_2 + \frac{1}{4} \to c_2 = -1$

$y = \frac{3}{4} - e^x + \frac{1}{4} e^{-x} - \frac{1}{2}\sin x$ istenen özel çözümdür.

(4) $y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x^2}$

$B(x) = \frac{e^{2x}}{x^2}$ olduğu için özel çözüm sabitin değişimi yöntemi ile aranmalıdır.

$y'' - 4y' + 4y = 0$

$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$

$(\lambda - 2)^2 = 0$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ katlı kök

$y_1 = e^{2x} \quad y_2 = xe^{2x}$

$y_h = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$ olur.

$$-2/ \begin{cases} c_1'(x).e^{2x} + c_2'(x)\,x e^{2x} = 0 \\ c_1'(x).2e^{2x} + c_2'(x)\left(e^{2x} + 2xe^{2x}\right) = \frac{e^{2x}}{x^2} \end{cases}$$

$c_2'(x).\cancel{e^{2x}} = \frac{\cancel{e^{2x}}}{x^2} \to c_2'(x) = \frac{1}{x^2} \to c_2(x) = -\frac{1}{x}$

$c_1'(x).\cancel{e^{2x}} = -x\cancel{e^{2x}}\frac{1}{x^2} \to c_1'(x) = -\frac{1}{x} \to c_1(x) = -\ln x$

$y_* = c_1(x)e^{2x} + c_2(x)xe^{2x}$

$y_* = -\ln x.e^{2x} - \frac{1}{x}.xe^{2x} = -\ln x\, e^{2x} - e^{2x}$ olur.

Genel çözüm $y = y_h + y_* = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} - e^{2x}.\ln x - e^{2x} = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} - e^{2x}\ln x$

(5) $T = \{1, 2x, x^2\} \to \lambda^3 = 0 \to y''' = 0$ bulunmalıdır

$W(1, 2x, x^2, y) = 0 \to \begin{vmatrix} 1 & 2x & x^2 & y \\ 0 & 2 & 2x & y' \\ 0 & 0 & 2 & y'' \\ 0 & 0 & 0 & y''' \end{vmatrix} = 0 \to 4y''' = 0 \to \underbrace{y''' = 0}_{\text{istenen dif denk}}$