Adı Soyadı : 26.01.2024
Numara :

MAT 301 DİFERENSİYEL GEOMETRİ I
FİNAL SINAVI SORULARI

SORU 1: $\forall 1 \leq i, j \leq n$ ve $[\ ]$, $\chi(E^n)$ de Lie oparatörü olmak üzere

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0$$

olduğunu gösteriniz.

SORU 2: $\alpha : I \to E^3$, $I = (0, \pi)$, $\alpha(t) = e^t(\cos t, \sin t, 1)$ eğrisini yay parametresi ile ifade ediniz.

SORU 3: Diferensiyel operatör'ü (d operatörü) tanımlayınız ve lineer olduğunu gösteriniz

SORU 4: $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \cos x_2, x_1 \sin x_2, x_3)$ dönüşümü verilsin. $\vec{V} = (2, -1, 3)$, $P = \left(2, \frac{\pi}{2}, \pi\right)$ olmak üzere $F_*\left(\vec{V}_P\right)$ türev dönüşümünü hesaplayınız.

SORU 5: $\forall f \in C\left(E^3, IR\right)$ için $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\, f) = 0$ olduğunu gösteriniz.

Not: Sorular eşit puanlı ve süre 90 dakikadır.

Başarılar

Prof.Dr. İsmail AYDEMİR

SORU 1: $\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] \stackrel{?}{=} 0$

$[\,,\,]: \mathcal{X}(E^n) \times \mathcal{X}(E^n) \longrightarrow \mathcal{X}(E^n)$ o.ü

$[X,Y][f] = X[Y[f]] - Y[X[f]]$ dönüşümü ile tanımlanan lie operatörüdür

Buna göre $\forall f \in C^\infty(E^n, \mathbb{R})$ için

$$[X,Y][f] = \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right][f] = \frac{\partial}{\partial x_i}\underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial x_j}[f]\right]}_{\frac{\partial f}{\partial x_j}} - \frac{\partial}{\partial x_j}\underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial x_i}[f]\right]}_{\frac{\partial f}{\partial x_i}}$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = 0 = 0[f]$$

O halde $\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0$ dır

SORU 2: $\alpha : I \to E^3 \quad I = (0, \pi)$

$\alpha(t) = e^t(\cos t, \sin t, 1)$ eğrisini yay parametresi ile ifade ediniz

$\alpha'(t) = e^t(\cos t - \sin t, \sin t + \cos t, 1)$

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{e^{2t}(\cos^2 t - \cancel{2\cos t \sin t} + \sin^2 t + \sin^2 t + \cancel{2\sin t \cos t} + \cos^2 t + 1)}$$

$$= e^t\sqrt{3}$$

α eğrisi $\|\alpha'(t)\| = e^t\sqrt{3} \neq 1$ olduğundan birim hızlı değildir. α nın yay parametresine ulaşmak için α yı birim hızlı hale getirelim.

$$s = \int_0^t \|\alpha'(u)\| . du = \int_0^t \sqrt{3} e^u . du = \sqrt{3}(e^t - 1)$$

$$\frac{s}{\sqrt{3}} + 1 = e^t \Rightarrow t = \ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1\right)$$

$$\beta(s) = \alpha\left(\ln \frac{s}{\sqrt{3}} + 1\right) = e^{\ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}}+1\right)}\left(\cos\left(\ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}}+1\right)\right), \sin\left(\ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}}+1\right)\right), 1\right)$$

$$= \left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1\right)\left(\cos\left(\ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}}+1\right)\right), \sin\left(\ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}}+1\right)\right), 1\right)$$ #

Soru 3: $d : C(E^n, \mathbb{R}) \longrightarrow \chi^*(E^n)$

$$f \longrightarrow df : \chi(E^n) \longrightarrow C(E^n, \mathbb{R})$$

$$X \longrightarrow df(X) = X[f]$$

ile tanımlanan d dönüşümüne diferansiyel operatör denir

$d : C(E^n, \mathbb{R}) \longrightarrow \chi^*(E^n)$ operatörü lineerdir.

$\forall\, a, b \in \mathbb{R}$, $\forall\, f, g \in C(E^n, \mathbb{R})$ için ve $\forall\, X \in \chi(E^n)$ için

$$d(af+bg)[X] = X[af+bg]$$

$$= a\, X[f] + b\, X[g]$$

$$= a\, df(X) + b\, dg(X)$$

$$= (a\,df + b\,dg)[X]$$

olup

$d(af+bg) = a\,df + b\,dg$ dır. Yani d operatörü lineerdir

Soru 4: $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1\cos x_2 \ , \ x_1\sin x_2, \ x_3)$, $p = (2, \frac{\pi}{2}, \pi)$

$\vec{v} = (2, -1, 3)$

$$F_*(\vec{v}_p) = \frac{d}{dt} F(p+tv)\Big|_{t=0}$$

$$p+tv = \left(2+2t, \ \frac{\pi}{2} - t \ , \ \pi + 3t\right)$$

$$F(p+tv) = \left((2+2t)\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right), \ (2+2t)\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right), \ \pi+3t\right)$$

$$\frac{d}{dt} F(p+tv) = \left(2\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right) + (2+2t)\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right), \ 2\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right) - (2+2t)\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right), \ 3\right)$$

$$\frac{d}{dt} F(p+tv)\Big|_{t=0} = \left(\underbrace{2\cos\frac{\pi}{2}}_{0} + 2\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1}, \ 2\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1} - 2\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0}, \ 3\right)$$

$$= (2, 2, 3)_{F(p)}$$

#

Soru 5: rot (gradf) = 0 old göster

$\forall f \in C^\infty(E^3, \mathbb{R})$ olalım.

$$\operatorname{grad} f = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \nabla \times \operatorname{grad} f = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{vmatrix}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right) - \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)\right]\frac{\partial}{\partial x_1} + \left[\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)\right]\frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)\right]\frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$= \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}\right]\frac{\partial}{\partial x_1} + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}\right]\frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$+ \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}\right]\frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$= 0 \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} + 0 \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} + 0 \cdot \frac{\partial}{\partial x_3} = 0 \in \chi(E^3) \quad \#$$