

Ad :
Soyad :
Numara :

16.06.2024

MAT 302 DİFERENSİYEL GEOMETRİ II FİNAL SORULARI

SORU 1 M , E^n de bir hiperyüzey olmak üzere M üzerinde X_p ve Y_p iki farklı asli eğriliklere karşılık gelen asli doğrultular (asli vektörler) ise X_p ve Y_p ortogonaldır. İspatlayınız.

SORU 2 $\alpha(t) = \left(\frac{4}{5} \cos t, 1 - \sin t, -\frac{3}{5} \cos t \right)$ parametrik denklemi ile verilen α eğrisinin κ eğriliğini ve τ burulmasını hesaplayınız.

SORU 3 $M = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\} \subset E^3$ dairesel silindiri ve $\alpha: I \rightarrow M \subset E^3$
 $t \rightarrow \alpha(t) = (\cos(at+b), \sin(at+b), ct+d)$ eğrisi verilsin. α eğrisinin M üzerinde geodezik eğri olduğunu gösteriniz.

SORU 4 $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in E^3 \mid f: E^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ kümesi verilsin. M nin bir yüzey olduğunu gösteriniz ve $P = (1, -1, 2)$ noktasında teğet düzleminin denklemini bulunuz.

SORU 5 M , E^3 de bir hiperyüzey olsun. M üzerinde temel formlar sırasıyla I, II, III ve Gauss eğriliği K , ortalama eğrilik fonksiyonu H olmak üzere,

$$III - 2HII + KI = 0$$

dir. İspatlayınız.

Not: Sorular eşit puanlıdır ve süre 90 dakikadır.

Başarılar
Prof. Dr. İsmail AYDEMİR

Soru 2: $\alpha(t) = \left(\frac{4}{5} \cos t, 1 - \sin t, -\frac{3}{5} \cos t \right)$

$T = \left(-\frac{4}{5} \sin t, -\cos t, \frac{3}{5} \sin t \right)$ $\|\alpha'(t)\| = 1$ Birim hız.

$N = \alpha''(t) = \left(-\frac{4}{5} \cos t, +\sin t, \frac{3}{5} \cos t \right)$

$K = \langle T', N \rangle = 1$

$\tau = \langle N', B \rangle = 0$

↓

$B = T \otimes N = \left(-\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5} \right)$

Soru 3: $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$

" $\forall p \in \mathbb{R}^3, M$ üzerinde $\Leftrightarrow f(p) = 0$ "

O halde

$f(\cos(at+b), \sin(at+b), ct+d) = 0$ olduğundan d eğrisi M üzerindedir.

$\nabla f = (2x_1, 2x_2, 0) \Rightarrow \|\nabla f\| = 2$

$N = (x_1, x_2, 0)$ olur.

$N|_{d(t)} = (\cos(at+b), \sin(at+b), 0)$

$d'(t) = (-a \sin(at+b), a \cos(at+b), 0)$

$d''(t) = (-a^2 \cos(at+b), -a^2 \sin(at+b), 0)$ olup

$d''(t) = -a^2 N|_{d(t)}$ olduğundan d, M üzerinde geodesiktir.

Soru 4:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right) = (2x_1, 2x_2, 2x_3)$$

$\forall p \in M$ için $\nabla f|_p \neq 0$ olup M bir yüzeydir.

$$\langle p\bar{x}, \nabla f|_p \rangle = 0, \quad x = (x_1, y_1, z) \in M \text{ olsun.}$$

$$\langle (x-1, y+1, z-2), (2, -2, 4) \rangle = 0$$

$$2x-2-2y-2+4z-8=0$$

$$2x-2y+4z-12=0$$

$$\boxed{x-y+2z=6}$$

1. ve 5. sorular için deftere bakınız