Adı Soyadı :
Numara :

07.01.2025

MAT 301 DİFERENSİYEL GEOMETRİ I
FİNAL SORULARI

SORU 1: $\vec{v}=(3,0,2)$, $P=(-4,1,3)$ olmak üzere $f:E^3\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=2xy+z^2+y^2+3$ fonkiyonu için $V_P[f]=?$

SORU 2: $F:E^n\to E^m$ dönüşümünün F_* türev dönüşümünü tanımlayınız ve lineer olduğunu gösteriniz.

SORU 3: $\alpha(t)=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\sin\sqrt{3}t,\sqrt{2},\cos\sqrt{3}t\right)$ eğrisinin Frenet vektörlerini bulunuz.

SORU 4: $X=x_2^2\frac{\partial}{\partial x_1}+\left(x_1^2-x_3^2\right)\frac{\partial}{\partial x_2}+e^{x_3}\frac{\partial}{\partial x_3}$ vektör alanı için $rot(X)=?$

SORU5: $\alpha:I\to E^3$, $\alpha(t)=(a\cos t,a\sin t,bt)$ $a,b\in\mathbb{R}$ eğrisini birim hızlı hale getiriniz.

Not: Sorular eşit puanlı ve süre 90 dakikadır.

Başarılar
Prof.Dr. İsmail AYDEMİR

CamScanner ile tarandı

Dif Geo I Final Cevap Anahtarı

Soru 1: $\vec{v} = (3,0,2)$ $P = (-4,1,3)$, $f(x,y,z) = 2xy + z^2 + y^2 + 3$

$$\vec{v}_p[f] = \sum_{i=1}^{3} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_p$$

$$= \underbrace{v_1}_{3} \cdot \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_p}_{2y} + \underbrace{v_2}_{0} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_2}\Big|_p}_{2x+2y} + \underbrace{v_3}_{2} \cdot \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_3}\Big|_p}_{2z}$$

$$2\underbrace{y(p)}_{1} \qquad 2\underbrace{x(p)}_{-4} + 2\underbrace{y(p)}_{1} \qquad 2\underbrace{z(p)}_{3}$$

$$= 6 + 0 + 12 = 18$$

Soru 2: Deftere bakınız

Soru 3: $\alpha(t) = \frac{\sqrt{3}}{3}(\sin\sqrt{3}t, \sqrt{2}, \cos\sqrt{3}t)$

$$\alpha'(t) = \cos\sqrt{3}t, 0, -\sin\sqrt{3}t$$

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{\cos^2\sqrt{3}t + \sin^2\sqrt{3}t} = 1 \quad \text{olup eğri birim hızlıdır.}$$

$$T = \alpha'(t) = (\cos\sqrt{3}t, 0, -\sin\sqrt{3}t)$$

$$N = \frac{\alpha''(t)}{\|\alpha''(t)\|}, \quad \alpha''(t) = (-\sqrt{3}\sin\sqrt{3}t, 0, -\sqrt{3}\cos\sqrt{3}t)$$

$$\|\alpha''(t)\| = \sqrt{3\sin^2\sqrt{3}t + 3\cos^2\sqrt{3}t} = \sqrt{3}$$

$$N = (-\sin\sqrt{3}t, 0, -\cos\sqrt{3}t)$$

$$B = T \otimes N = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos\sqrt{3}t & 0 & -\sin\sqrt{3}t \\ -\sin\sqrt{3}t & 0 & -\cos\sqrt{3}t \end{vmatrix} = (0,1,0)$$

#

Soru 4:
$$X = x_2^2 \frac{\partial}{\partial x_1} + (x_1^2 - x_3^2)\frac{\partial}{\partial x_2} + e^{x_3}\frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$\operatorname{rot} X = \nabla \otimes X = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ x_2^2 & x_1^2 - x_3^2 & e^{x_3} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial (e^{x_3})}{\partial x_2} - \frac{\partial (x_1^2 - x_3^2)}{\partial x_3}, -\frac{\partial e^{x_3}}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2^2}{\partial x_3}, \frac{\partial (x_1^2 - x_3^2)}{\partial x_1} - \frac{\partial x_2^2}{\partial x_2} \right)$$

$$= (-2x_3, 0, 2x_1 - 2x_2) \ \#$$

Soru 5: $\alpha : I \to E^3$

$t \to \alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ $a, b \in \mathbb{R}$

$\alpha'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$

$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{a^2+b^2} \neq 1$ birim hızlı değil.

$$s = \int_0^t \sqrt{a^2+b^2}\, du = \sqrt{a^2+b^2} \cdot u \Big|_0^t = \sqrt{a^2+b^2}\, t$$

$$s = \sqrt{a^2+b^2}\, t \Rightarrow t = \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

O halde

$$\beta(s) = \left(a\cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right), \frac{b \cdot s}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$$ elde edilir

Gerçektende $\|\beta(s)\| = 1$ dır.