DİFERENSİYEL GEOMETRİ II FİNAL SINAVI SORULARI

SORU 1 $\alpha:\mathbb{R}\to E^3,\ t\to\alpha(t)=\left(t,\dfrac{1-t}{t},\dfrac{1-t^2}{t}\right)$ eğrisi veriliyor.

a) α eğrisinin $t=1$ noktasındaki Frenet vektörlerini bulunuz.

b) α eğrisinin $t=1$ noktasındaki eğriliklerini bulunuz.

SORU 2 M, E^3 de (I,α) koordinat komşuluğu ile verilmiş yay-parametreli bir eğri olsun. M düzlemsel ise $\tau=0$ dır, gösteriniz

SORU 3 (M,N) Bertrand eğri çifti olsun. $M,N\subset E^3$ eğrileri sırasıyla $(I,\alpha),(I,\beta)$ koordinat komşulukları ile verildiğine göre, $\forall s\in I$ için $d(\alpha(s),\beta(s))=$ sabit dir, ispatlayınız.

SORU 4 $M=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1^2+x_2^2=1\}\subset E^3$ dairesel silindiri ve

$\alpha:I\to M\subset E^3,\ t\to\alpha(t)=(\cos(at+b),\sin(at+b),ct+d)$ eğrisi verilsin.

α eğrisinin M üzerinde bir geodezik eğri olduğunu gösteriniz.

Not: 1. Soru 40 diğerleri 20 puan ve süre 90 dakikadır.

Başarılar
Prof.Dr. İsmail AYDEMİR

Diferansiyel Geometri Cevap Anahtarı

1) $\alpha(t) = \left(t, \frac{1-t}{t}, \frac{1-t^2}{t} \right)$

$\alpha'(t) = \left(1, -\frac{1}{t^2}, -\frac{1}{t^2} - 1 \right)$

$t=1$ için $\alpha'(1) = (1, -1, -2)$

$\alpha''(t) = \left(0, \frac{2}{t^3}, \frac{2}{t^3} \right) \Rightarrow t=1$ için $\alpha''(1) = (0, 2, 2)$

$\alpha'''(t) = \left(0, -\frac{6}{t^4}, -\frac{6}{t^4} \right) \Rightarrow \alpha'''(1) = (0, -6, -6)$

a) $T = \frac{\alpha'(1)}{\|\alpha'(1)\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} (1, -1, -2)$

$B = \frac{\alpha' \times \alpha''}{\|\alpha' \times \alpha''\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} (1, -1, 1)$

$N = B \times T = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$

b) $\kappa = \frac{\|\alpha'(1) \times \alpha''(1)\|}{\|\alpha'(1)\|^3} = \frac{\sqrt{2}}{6}$

$\tau = \frac{\det(\alpha'(1), \alpha''(1), \alpha'''(1))}{\|\alpha'(1) \times \alpha''(1)\|^2} = 0$ #

CamScanner ile tarandı

2 ve 3) Soru 2 ve 3 cevapları için deftere bakınız.

4) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2-1=0$ dif bir fonksiyonu göz önüne alalım.

$P\in E^3$, M üzerindedir $\Leftrightarrow$ $f(P)=0$ yazılabilir.

$f\left(\cos(at+b), \sin(at+b), ct+d\right)=0$ old. α eğrisi M üzerindedir

$\vec{\nabla f}=\left(2x_1, 2x_2, 0\right)$, $\|\vec{\nabla f}\| = \sqrt{4} = 2$ olur

$N=(x_1,x_2,0)$ olup

$$N\Big|_{\alpha(t)} = \left(\cos(at+b), \sin(at+b), 0\right)$$

$$\alpha'(t) = \left(-a\sin(at+b), a\cos(at+b), 0\right)$$

$$\alpha''(t) = \left(-a^2\cos(at+b), -a^2\sin(at+b), 0\right)$$

$$= -a^2\left(\cos(at+b), \sin(at+b), 0\right)$$

$$= -a^2 N_{\alpha(t)}$$

olduğundan, α, M de bir geodeziktir.

CamScanner ile tarandı