1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

2021-2022 ÖĞRETİM YILI ANALİZ III DERSİ FİNAL SINAVI

1- Her $n \in IN$ için $f_n(x) = \frac{nx^2}{n^3+x^3}$ olmak üzere (f_n) fonksiyon dizisinin $[0,1]$ kapalı aralığı üzerinde terim terime integrallenebilirliğini inceleyiniz.

2- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-3)^k}{k5^k}$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapını ve yakınsaklık kümesini bulunuz.

3- $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < y < 2\}$ kümesi verilmiş olsun. Bu kümenin

(a) S° içini, S' yığılma noktaları kümesini, $\bar{S}$ kapanışını ve ∂S sınırını bulunuz,

(b) açık veya kapalı olup olmadığını inceleyiniz ve geometrik olarak belirtiniz.

4- $I = \int_0^{\infty} \frac{1-cosx}{x^2} dx$ has olmayan integralinin yakınsak olup olmadığını araştırınız.

5- $\mathbb{R}^3$ uzayında $\left(\left(\frac{sinn}{n}, arctan\frac{n+1}{n}, \left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)\right)$ dizisinin yakınsak olup olmadığını araştırınız.

6- $\mathbb{R}^n$ uzayında Cauchy dizilerinin sınırlı olduğunu gösteriniz.

7- $E \subset \mathbb{R}^n$ ve E', E nin limit noktalarının kümesi olsun. E kapalı$\Leftrightarrow$ $E' \subset E$ olduğunu ispatlayınız.

8- Aşağıdaki kümelerin kompakt olup olmadığını araştırınız.

(a) $E = \{1, 2, 3/2, 4/3, 5/4, \ldots\} \subset \mathbb{R}$, **(b)** $E = \{(x,y) : x-1 \leq y \leq x+1\} \subset \mathbb{R}^2$.

9- $\mathbb{R}^3$ uzayında verilen $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(arctan\frac{1}{n^2+\pi}\right)^n, \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^{cos\frac{1}{n}}, \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{ln\sqrt{n}+n^3}\right)\right)$ serisinin karakterini belirleyiniz.

10- Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = \left(sin\frac{1}{(n+1)^2}, \frac{1-n}{1+n}\right) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere (x_n) dizisinin $(0,-1) \in \mathbb{R}^2$ noktasına yakınsadığını tanımı kullanarak gösteriniz.

Not: Süre 120 Dakikadır ve sadece 8 soruya cevap veriniz... **21.01.2022**

ANALİZ III FİNAL SINAVI CEVAP ANAHTARI

1) $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{n^3+x^3}$, $[0,1]$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx^2}{n^3+x^3} = 0 = f(x)$$

$$M_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [0,1]\}$$

$$= \sup\left\{\left|\frac{nx^2}{n^3+x^3} - 0\right| : x \in [0,1]\right\}$$

$$= \sup\left\{\frac{nx^2}{n^3+x^3} : x \in [0,1]\right\}$$

$$g(x) = \frac{nx^2}{n^3+x^3} \Rightarrow g'(x) = \frac{2nx(n^3+x^3) - 3x^2(nx^2)}{(n^3+x^3)^2}$$

$$= \frac{2n^4x - nx^4}{(n^3+x^3)^2} > 0$$

$\Rightarrow$ g ARTAN

$$M_n = g(1) = \frac{n}{n^3+1}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} M_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n^3+1} = 0$ olduğundan (f_n) fonksiyon dizisi f fonksiyonuna $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsar ve dolayısıyla terim terime integrallenebilirdir.

2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-3)^k}{k.5^k}$

$a_k = \dfrac{1}{k.5^k}$, $x_0 = 3$

$$R = \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{a_{k+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k.5^k} \cdot (k+1).5^{k+1} = 5$$

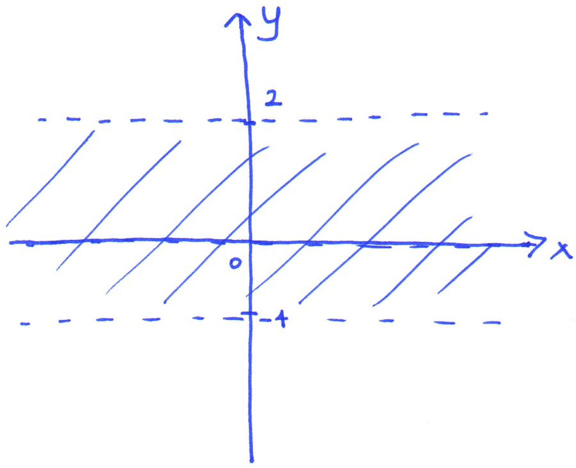
Verilen kuvvet serisi $(3-5, 3+5) = (-2, 8)$ aralığında yakınsak, $(-\infty,-2) \cup (8,\infty)$ da ıraksaktır. $x=-2$ ve $x=8$ noktaları ayrıca incelenir.

$x=-2$ için $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-5)^k}{k.5^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ serisi elde edilir ve Leibnitz gereği bu seri yakınsaktır.

$x=8$ için $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{k.5^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ serisi elde edilir ve p testi gereği bu seri ıraksaktır.

O halde verilen kuvvet serisinin yakınsaklık kümesi $[-2, 8)$ dir.

3-) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < y < 2\}$



$\forall (x,y) \in S$ için $\varepsilon = \min\{2-y, y+1\}$ seçilirse

$$B((x,y), \varepsilon) \subset S$$

olur. Dolayısıyla S nin her noktası iç nokta olup $S^\circ = S$ dir.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ alalım.

$-1 \leq y \leq 2$ ise $\forall \varepsilon > 0$ için $\left(B((x,y), \varepsilon) - \{(x,y)\}\right) \cap S \neq \emptyset$

olup $(x,y) \in S'$ dır.

$y > 2$ ise $\varepsilon = y - 2$ seçilirse $\left(B((x,y), \varepsilon) - \{(x,y)\}\right) \cap S = \emptyset$

olup $(x,y) \notin S'$ dır.

$y < -1$ ise $\varepsilon = -1 - y$ seçilirse $\left(B((x,y), \varepsilon) - \{(x,y)\}\right) \cap S = \emptyset$

olup $(x,y) \notin S'$ dır.

Böylece $S' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 2\}$ dir.

$\bar{S} = S \cup S' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 2\}$

$\partial S = \bar{S} - S^\circ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -1\}$

$S^\circ = S$ olduğundan S açık kümedir.

$\bar{S} \neq S$ olduğundan S kapalı küme değildir.

4-) $I=\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx}_{\text{2. tip has olmayan integral}} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx}_{\text{1. tip has olmayan integral}}$

$\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$ integralinin karakterini belirleyelim.

$f(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}$

$g(x)=\frac{1}{x^{1/2}}$ olsun.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1-\cos x}{x^2}}{\frac{1}{x^{1/2}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{x^{3/2}} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{LH}{=}} \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{\frac{3}{2}x^{1/2}}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{LH}{=}} \lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x}{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{1/2}}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{4}{3}\cdot x^{1/2}\cos x$$

$$=0$$

$\int_0^1 g(x)\,dx=\int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}}\,dx$ integrali $p=\frac{1}{2}<1$ olduğundan yakınsaktı

Dolayısıyla $\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$ integrali de yakınsaktır.

$\int_1^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$ integralinin karakterini belirleyelim.

$-1\le \cos x\le 1 \Rightarrow -1\le -\cos x\le 1 \Rightarrow 0\le 1-\cos x\le 2$

$\Rightarrow 0\le \frac{1-\cos x}{x^2}\le \frac{2}{x^2}$

$\int_1^\infty \frac{2}{x^2}\,dx = 2\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ has olmayan integreli $(p=2>1)$ p-testi gereği yakınsaktır. Dolayısıyla karşılaştırma testi gereği $\int_1^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$ has olmayan integrali de yakınsaktır.

Sonuç olarak $\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$ integrali yakınsaktır.

5-) $\left(\frac{\sin n}{n}, \arctan \frac{n+1}{n}, \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \right)$

$-1 \leq \sin n \leq 1$ ve dolayısıyla $\frac{-1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$ olup sıkıştırma teoremi gereği $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$ dır.

$\lim_{n\to\infty} \arctan \frac{n+1}{n} = \frac{\pi}{4}$

$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} = \frac{1}{e}$

Verilen dizi $\left(0, \frac{\pi}{4}, \frac{1}{e}\right) \in \mathbb{R}^3$ noktasına yakınsar.

6-) Ders notlarında var.

7-) E kapalı $\Leftrightarrow$ $E' \subset E$

$(\Rightarrow)$: E kapalı olsun ve $E' \not\subset E$ varsayalım. E kapalı olduğundan $\mathbb{R}^n - E$ açık ve $E' \not\subset E$ olduğundan $x \notin E$ $(x \in \mathbb{R}^n - E)$ olacak şekilde $x \in E'$ vardır. $\mathbb{R}^n - E$ nin açık olmasından dolayı $B(x,\varepsilon) \subset \mathbb{R}^n - E$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ vardır. Böylece $(B(x,\varepsilon) \setminus \{x\}) \cap E = \emptyset$ olup $x \notin E'$ çelişkisi oluşur. O halde varsayım yanlıştır, buna göre $E' \subset E$ olmalıdır.

$(\Leftarrow)$: $E' \subset E$ olsun. Bu durumda $E \cup E' = \overline{E} \subset E \cup E = E$ olur. Aynı zamanda $E \subset \overline{E}$ olduğundan $\overline{E} = E$ dir.

Sonuç olarak E kapalıdır

8-) $\mathbb{R}^n$ uzayında bir küme kompakt $\Leftrightarrow$ kapalı ve sınırlı olduğunu kullanacağız.

a) $2 = 1+\frac{1}{1}$, $\frac{3}{2} = 1+\frac{1}{2}$, $\frac{5}{4} = 1+\frac{1}{4}$, ..., $\frac{n+1}{n} = 1+\frac{1}{n}$, ...

olduğuna göre E kümesi $(1+\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin terimleri ve 1 noktasından oluşmaktadır. $\lim_{n\to\infty} 1+\frac{1}{n} = 1$ olduğuna göre 1 noktası $(1+\frac{1}{n})$ dizisinin limiti, dolayısıyla E nin bir limit noktasıdır. $x=1$ dışındaki herhangi bir noktanın hiçbir ε-komşuluğu bu dizinin, dolayısıyla E nin sonsuz çoklukta noktasını içeremez. O halde $E' \subset E$, böylece E kapalı olur.

$\forall x \in E$ için $|x| \leq 2$ olduğundan E sınırlıdır.

Sonuç olarak E kompakttır.

b) E sınırlı değildir, çünkü öyle olsaydı $\forall (x,y) \in E$ için

$$\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2} < M$$

olacak şekilde bir $M>0$ bulunurdu, o zaman $x = M+1$ için $M \leq y \leq M+2$ olmak üzere

$$\|(x,y)\| = \|(M+1,y)\| = \sqrt{(M+1)^2+y^2} \geq \sqrt{(M+1)^2+M^2} \geq \sqrt{2M^2}$$

çelişkisi oluşurdu.

9) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arctan \frac{1}{n^2+\pi}\right)^n$ serisini ele alırsak;

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\arctan \frac{1}{n^2+\pi}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \arctan \frac{1}{n^2+\pi} = 0 < 1$$

olduğundan kök testi gereği seri yakınsaktır.

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^{\cos\frac{1}{n}}$ serisini ele alırsak;

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^{\cos\frac{1}{n}} = \frac{1}{e} \neq 0$$

olduğundan genel terim testi gereği seri ıraksaktır.

O halde $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arctan \frac{1}{n^2+\pi}\right)^n , \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^{\cos\frac{1}{n}} , \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln\sqrt{n} + n^3} \right)$ serisi ıraksaktır.

10) $\lim_{n\to\infty} \left(\sin \frac{1}{(n+1)^2} , \frac{1-n}{1+n} \right) = (0,-1)$ olduğunu göstereceğiz.

$\forall \varepsilon > 0$ verildiğinde $\forall n \geq n_0$ olduğunda $\left\| \left(\sin\frac{1}{(n+1)^2} , \frac{1-n}{1+n} \right) - (0,-1) \right\| < \varepsilon$ olacak şekilde $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ var mı?

$$\left\| \left(\sin\frac{1}{(n+1)^2} , \frac{1-n}{1+n} \right) - (0,-1) \right\| = \left\| \left(\sin\frac{1}{(n+1)^2} , \frac{2}{1+n} \right) \right\|$$

$$= \sqrt{\sin^2 \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{4}{(1+n)^2}}$$

$$\leq \sqrt{\frac{1}{(n+1)^4} + \frac{4}{(1+n)^2}}$$

$$\leq \sqrt{\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{4}{(n+1)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{n+1} < \frac{\sqrt{5}}{n} \leq \frac{\sqrt{5}}{n_0} < \varepsilon$$

$$\frac{\sqrt{5}}{n_0} < \varepsilon \Rightarrow \frac{n_0}{\sqrt{5}} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n_0 > \frac{\sqrt{5}}{\varepsilon}$$

$$n_0 = \left[\!\left| \frac{\sqrt{5}}{\varepsilon} \right|\!\right] + 1 \in \mathbb{N}$$