**Ad-soyad :**

**Numara :** Cevap Anahtarı

**Lineer Cebir II Final Sınavı Soruları** 17.06.2025

1) Aşağıdaki soruları yanında bulunan parantez içine doğru ise "D", yanlış ise "Y" yazarak cevaplayınız (Her şık 4 p).

(D) Her matris kendi karakteristik denklemini sağlar.

(Y) $L:V \to W$ bir lineer dönüşüm olmak üzere $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ vektör kümesi V nin bir bazı ise $\{L(\alpha_1), L(\alpha_2), ..., L(\alpha_n)\}$ kümesi de W nun bazıdır.

(D) Farklı özdeğerlere karşılık gelen özvektörler lineer bağımsızdır.

(Y) Boyutları farklı olan vektör uzayları birbirine izomorf olabilir.

(D) Her matris bir lineer dönüşüm, her lineer dönüşüm bir matris belirtir.

2) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ matrisinin öz değerleri 1 ve -1 dir. Bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler sırasıyla $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ olduğuna göre $a+b+c+d$ toplamı kaçtır (20 p)?

3) $A = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 14 & -8 \end{bmatrix}$ matrisi veriliyor.

a) A nın karakteristik polinomunu bulunuz (10 p).

b) Cayley – Hamilton Teoremini kullanarak $A^{19}$ u hesaplayınız (10 p).

4) $L:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ lineer dönüşümü $L(a,b,c,d) = (a+b+c, b+c+d, a+d)$ olarak tanımlayıor.

a) L nin çekirdeği için bir baz bulunuz (7 p).

b) L nin görüntü uzayı için bir baz bulunuz (7 p).

c) L nin sıfırlığını ve rankını belirleyiniz (6 p).

5) $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = 8x_1x_2 - 6(x_1y_2 + y_1x_2) + 5y_1y_2$ olarak tanımlanan $\langle -,- \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun iç çarpım fonksiyonu olduğunu gösteriniz (20 p).

6) A kare matrisinin tersinin olmaması için gerek yeter şart sıfırın A nın bir özdeğeri olmasıdır, gösteriniz (20 p).

2) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2a+3b \\ 2c+3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2a+3b=2 \\ 2c+3d=3 \end{matrix}$

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = -1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a+2b \\ c+2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a+2b=-1 \\ c+2d=-2 \end{matrix}$

$$\begin{array}{l} 2a+3b=2 \\ -2/\ a+2b=-1 \\ \hline -b=4 \Rightarrow b=-4,\ a=7 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 2c+3d=3 \\ -2/\ c+2d=-2 \\ \hline -d=7 \Rightarrow d=-7,\ \cancel{c=-9} \\ c=12 \end{array}$$

$\Rightarrow a+b+c+d = 7-4\overset{+12}{\cancel{-9}}\cancel{+}7 = 8$

3) a) $\det(xI-A) = \det\left(\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 14 & -8 \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} x-7 & 4 \\ -14 & x+8 \end{vmatrix}$

$= (x-7)(x+8)+56 = x^2+x$

b) Cayley-Hamilton teoremine göre her matris karakteristik denklemini sağlar. Verilen A matrisi karakteristik denklemini sağlayacağı $x^2+x=0$ karakteristik denklemi için $A^2+A=0$ ve buradan $A^2=-A$ elde edilir.

$A^{19} = A^{18}.A = (A^2)^9.A = (-A)^9.A = -A^{10} = -(A^2)^5 = -(-A)^5$
$= A^5 = A^4.A = (A^2)^2.A = (-A)^2.A = A^2.A = -A.A = -A^2 = A$
$= \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 14 & -8 \end{bmatrix}$

4) a) $\text{Çek}L = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : L(a,b,c,d) = 0_{\mathbb{R}^3}\}$
$= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : (a+b+c,\ b+c+d,\ a+d) = (0,0,0)\}$

$\begin{cases} a+b+c=0 \\ b+c+d=0 \\ a+d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-R_1+R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2+R_3]{-R_2+R_1}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{R_3}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-R_3+R_2]{R_3+R_1}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$ a, b, d temel, c serbest değişken.
$c=t$ dersek $a=d=0$, $b=-t$ olur.

$\Rightarrow$ çek $L = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : a=d=0,\ -b=c=t\}$
$= \{(0,-t,t,0) : t \in \mathbb{R}\} = sp\{(0,-1,1,0)\}$

$\Rightarrow \{(0,-1,1,0)\}$, çek $L$ nin bir bazıdır.

b) $L(\mathbb{R}^4) = \{L(a,b,c,d) : (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4\}$
$= \{(a+b+c, b+c+d, a+d) \in \mathbb{R}^3 : (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4\}$
$= \{a(1,0,1) + (b+c)(1,1,0) + d(0,1,1) : (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4\}$
$= sp\{(1,0,1),(1,1,0),(0,1,1)\}$

$U = \{(1,0,1),(1,1,0),(0,1,1)\}$ lineer bağımsız ise $L(\mathbb{R}^4) = sp\,U$ olduğundan $L(\mathbb{R}^4)$ için baz olur.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

$\Rightarrow U$ lineer bağımsız olup $L$ nin görüntü uzayı $L(\mathbb{R}^4)$ için bir bazdır.

c) sıfırlık $L$ = boy çek $L = 1$
rank $L$ = boy $L(\mathbb{R}^4) = 3$

CamScanner ile tarandı

5) Simetri: $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = 8x_1x_2 - 6(x_1y_2 + y_1x_2) + 5y_1y_2$

$= 8x_2x_1 - 6(x_2y_1 + y_2x_1) + 5y_2y_1$

$= \langle (x_2, y_2), (x_1, y_1) \rangle$

Bilineerlik:

$\langle (x_1, y_1) + (x_2, y_2), (x_3, y_3) \rangle = \langle (x_1 + x_2, y_1 + y_2), (x_3, y_3) \rangle$

$= 8(x_1 + x_2)x_3 - 6((x_1 + x_2)y_3 + (y_1 + y_2)x_3)$

$+ 5(y_1 + y_2)y_3$

$= 8x_1x_3 + 8x_2x_3 - 6(x_1y_3 + y_1x_3)$

$-6(x_2y_3 + y_2x_3) + 5y_1y_3 + 5y_2y_3$

$= 8x_1x_3 - 6(x_1y_3 + y_1x_3) + 5y_1y_3$

$+ 8x_2x_3 - 6(x_2y_3 + y_2x_3) + 5y_2y_3$

$= \langle (x_1, y_1), (x_3, y_3) \rangle + \langle (x_2, y_2), (x_3, y_3) \rangle$

$\langle c(x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = \langle (cx_1, cy_1), (x_2, y_2) \rangle$

$= 8cx_1x_2 - 6(cx_1y_2 + cy_1x_2) + 5cy_1y_2$

$= c(8x_1x_2 - 6(x_1y_2 + y_1x_2) + 5y_1y_2)$

$= c\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle$

$\Rightarrow$ 1. yere göre lineerlik sağlanır.

1. yere göre lineerlik + simetri $\Rightarrow$ 2. yere göre lineerlik sağlanır.

$\therefore$ Bilineerlik sağlanır.

CamScanner ile tarandı

## Pozitif tanımlılık:

$\langle (x_1, y_1), (x_1, y_1) \rangle = 8x_1^2 - 12x_1y_1 + 5y_1^2 = 8x_1^2 - (12y_1)x_1 + 5y_1^2$

$x_1$ e göre 2. dereceden denklem olup diskriminantı

$\Delta = b^2 - 4ac = (-12y_1)^2 - 4.8.5y_1^2 = 144y_1^2 - 160y_1^2$

$= -16y_1^2$

$y_1 \neq 0$ için $\Delta < 0$ olup reel kök yoktur. $8x_1^2 - 12y_1x_1 + 5y_1^2$ kolları yukarı yönlü parabol olup reel kökü olmadığından her zaman pozitiftir. O halde, $y_1 \neq 0$ için $\langle (x_1, y_1), (x_1, y_1) \rangle$ her zaman pozitif olur.

$y_1 = 0$ için $\Delta = 0$ olup $\langle (x_1, 0), (x_1, 0) \rangle = 8x_1^2 \geq 0$

olup pozitif tanımlılık sağlanır.

$\langle (x_1, y_1), (x_1, y_1) \rangle = 0 \Leftrightarrow 8x_1^2 - 12y_1x_1 + 5y_1^2 = 0$

$\Leftrightarrow$ Yukarıdaki incelemeye göre $(x_1, y_1) = 0$

$\therefore$ Verilen fonksiyon bir iç çarpım fonksiyonudur.

6) A nın tersi yok $\Leftrightarrow \det A = 0 \Leftrightarrow AX = 0$ homojen lineer denklem sisteminin sıfırdan farklı $X_1$ çözümü vardır $\Leftrightarrow$ Sıfırdan farklı $X_1$ vektörü için $AX_1 = 0 = 0.X_1$ sağlanır $\Leftrightarrow X_1$ vektörü, 0 özdeğerine karşılık gelen özvektördür.