FONKSİYONEL ANALİZ DERSİ FİNAL SINAVI SORU VE CEVAPLARI.

1) (a) Normlu uzay tanımını yapınız.

Çözüm. V bir $\mathbb{F}$ vektör uzayı olmak üzere bir $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$ fonksiyonu şu üç aksiyomu sağlıyorsa, bu fonksiyona V üzerinde bir 'norm', V'ye de bir 'normlu uzay' denir ve $(V, \|\cdot\|)$ ile gösterilir:

(N1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$,

(N2) $\forall \lambda \in \mathbb{F}$, $\forall x \in V$ için $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$,

(N3) $\forall x, y \in V$ için $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

(b) $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olmak üzere
$$\varphi : (X, \|\cdot\|) \to (\mathbb{R}, |\cdot|),\ \varphi(x) = \|x\|$$
fonksiyonunun sürekli olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $\forall x_0 \in X$ ve $\forall \varepsilon > 0$ verilsin. $\delta := \varepsilon$ seçilirse
$$\|x - x_0\| < \delta \wedge x \in X \Rightarrow \big|\|x\| - \|x_0\|\big| \leq \|x - x_0\| < \delta = \varepsilon$$
yazılır.

2) $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$ normlu uzayının bir Banach uzayı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$ uzayından herhangi $x = (x_n)$ Cauchy dizisi alınsın. O zaman $\forall \varepsilon > 0$ verildiğinde $\forall n, m \geq n_\varepsilon$ için
$$\|x_m - x_n\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(m)} - x_k^{(n)}| < \varepsilon \quad \ldots (1)$$
olacak şekilde $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ vardır. O zaman $\forall k = 1, 2, \ldots$ için
$$m, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |x_k^{(m)} - x_k^{(n)}| < \varepsilon$$
yazılır. O halde $\forall k = 1, 2, \ldots$ için $(x_k^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ skalerlerin bir Cauchy dizisidir, $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ tam olduğundan, $\forall k = 1, 2, \ldots$ için
$$\lim_{n \to \infty} x_k^{(n)} = x_k$$
olacak şekilde $x_k \in \mathbb{R} (\vee \mathbb{C})$ vardır.

Böylece skalerlerin bir $x = (x_1, x_2, \ldots)$ dizisi oluşur.

$\forall m \geq n_\varepsilon$ için $\lim_{n \to \infty} |x_k^{(n)} - x_k| = 0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}| = |x_k - x_k^{(m)}|$

$\Rightarrow \forall N \in \mathbb{N}$ için $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{N} |x_k^{(m)} - x_k^{(n)}| = \sum_{k=1}^{N} |x_k^{(m)} - x_k| < \varepsilon$ ((1) den)

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(m)} - x_k| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{m \to \infty} \|x_m - x\|_1 = 0 \Rightarrow \lim_{m \to \infty} x_m \overset{\|\cdot\|_1}{=} x$ olur.

Yine $\forall m \geq n_\varepsilon$ için $(x_m - x) \in \ell_1$ ve $x_m \in \ell_1$ olduğundan, $x_m - (x_m - x) = x \in \ell_1$ olur, çünkü ℓ_1 bir vektör uzayıdır.

3) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n = \frac{x^n}{2^n}$ olmak üzere $a = (a_n)$ dizisi verilsin

(a) a dizisinin hangi $x \in \mathbb{R}$ değerleri için $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$ uzayına ait olduğunu belirleyiniz.

Çözüm: $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{2^n} < \infty$ olmalı.

$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{|x|^{n+1}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{|x|^n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{2} = \frac{|x|}{2} < 1$ ise

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{2^n} < \infty$, yani $-2 < x < 2$ değerleri için $a \in (\ell_1, \|\cdot\|_1)$

(b) $\|a\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \left(\frac{|x|}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{|x|}{2}} = \frac{1}{1 - \frac{|x|}{2}} = \frac{2}{2 - |x|}$, $(-2 < x < 2)$

4) (X, d) bir metrik uzay olsun. Bu takdirde

$d_1 : X \times X \to \mathbb{R}$, $d_1(x,y) = \ln(1 + d(x,y))$

olmak üzere (X, d_1) bir metrik uzay dur mu?

çözüm. (M1) $d_1(x,y) = \ln(1 + d(x,y)) = 0 \Leftrightarrow 1 + d(x,y) = 1$
$\Leftrightarrow d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(M2) $d_1(x,y) = \ln(1 + d(x,y)) = \ln(1 + d(y,x)) = d_1(y,x)$,

(M3) $d_1(x,y) = \ln(1 + d(x,y)) \leq \ln(1 + d(x,z) + d(z,y))$
$\leq \ln(1 + d(x,z) + d(z,y) + d(x,z) \cdot d(z,y))$
$= \ln((1 + d(x,z)) \cdot (1 + d(z,y)))$
$= \ln(1 + d(x,z)) + \ln(1 + d(z,y)) = d_1(x,z) + d_1(z,y)$

burada ln fonksiyonunun artanlığının kullanıldığına dikkat ediniz.

(5) (a) $C[1,e] = \{ f \mid f : [1,e] \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyon$\}$ vektör uzayı üzerinde $\|f\| = \int_1^e |f(x)| dx$ fonksiyonunun bir norm olduğunu gösteriniz, $f(x) = \ln x$ için $\|f\|$ değerini bulunuz.

Çözüm: (N1) $\|f\| = \int_1^e |f(x)| dx = 0 \Leftrightarrow \forall x \in [1,e]$ için $|f(x)| = 0$
(çünkü f sürekli) $\Leftrightarrow [1,e]$ üzerinde $f = 0$,

(N2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall f \in C[1,e]$ için
$\|\lambda f\| = \int_1^e |\lambda f(x)| dx = |\lambda| \int_1^e |f(x)| dx = |\lambda| \|f\|$,

(N3) $\forall f, g \in C[1,e]$ için
$\|f+g\| = \int_1^e |f(x) + g(x)| dx \leq \int_1^e (|f(x)| + |g(x)|) dx = \|f\| + \|g\|$

$f(x)=\ln x$ için $\|f\|=?$

$[1,e]$ üzerinde $\ln x \geq 0$ olduğundan,

$$\|\ln\| = \int_1^e \ln x\,dx = \left[x\ln x - x\right]_{x=1}^{x=e} = e\ln e - e - (1)\ln(1) + 1 = 1.$$

(b) $(V, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olsun.

$$\|\cdot\|_1 : V \to \mathbb{R},\ \|x\|_1 = \|x\|/(1+\|x\|)$$

fonksiyonu V üzerinde bir norm olur mu?

Çözüm: (N1) $\|x\|_1 = \|x\|/(1+\|x\|) = 0 \Leftrightarrow \|x\| = 0 \Leftrightarrow x=\theta$,

(N2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in V$ için, $\lambda \neq 1$ olmak üzere

$$\|\lambda x\|_1 = \frac{\|\lambda x\|}{1+\|\lambda x\|} = \frac{|\lambda|\,\|x\|}{1+|\lambda|\,\|x\|} \neq |\lambda|\|x\|_1 = \frac{|\lambda|\cdot\|x\|}{1+\|x\|}$$

olur. Buna göre $\|\cdot\|_1$ fonksiyonu V üzerinde norm değildir.