Adı Soyadı: **03.05.2024**
Numarası:

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ FEN FAKÜLTESİ MATEMATİK BÖLÜMÜ

2023-2024 EĞİTİM ÖĞRETİM YILI MAT 468 FONKSİYONEL ANALİZ ARASINAV SORULARI

1) a) $\mathbb{R}^n$ üzerinde $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, $y=(y_1,y_2,...,y_n)$ olmak üzere $d_1(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$ ve $d_\infty(x,y)=\max\{|x_i-y_i|: i=1,2,...,n\}$ metriklerini ele alalım. Buna göre $d_\infty(x,y)\le d_1(x,y)\le n.d_\infty(x,y)$ eşitsizliğini ispatlayınız.

b) $x=(0,1,0,0,...,0)$, $y=(1,0,0,...,0)\in\mathbb{R}^n$ için $d_1(x,y)$ ve $d_\infty(x,y)$ değerlerini bulunuz.

2) a) Ayrık metrik uzayların sınırlı küme olduğunu gösteriniz.

b) $(\mathbb{R}^2,d_a)$ ayrık metrik uzayında $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0,\ y\le 5\}$ kümesinin yığılma noktaları kümesini ve kapanışını bulunuz. A kümesinin kapalı küme olup olmadığını belirleyiniz.

3) a) Herhangi bir metrik uzayda kapalı kümelerin sonlu birleşimlerinin kapalı olduğunu gösteriniz.

b) (X,d) bir metrik uzay ve $A\subset X$ olsun. Bu durumda $A\subset A^\circ$ kapsaması her zaman doğru mudur? Evet ise ispatlayınız, hayır ise örnek veriniz.

4) a) Herhangi bir metrik uzayda yoğun küme ve hiçbir yerde yoğun olmayan küme tanımlarını veriniz. Ayrılabilir metrik uzay kavramını açıklayınız ve bir örnek veriniz

b) $x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$ için $d_2(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{2}(x_i-y_i)^2}$ olmak üzere $(\mathbb{R}^2,d_2)$ metrik uzayında $x_n=\left(1-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right)$ genel terimli (x_n) dizisinin $(1,1)\in\mathbb{R}^2$ noktasına yakınsadığını gösteriniz.

5) a) (X,d) bir metrik uzay ve $(x_n),(y_n)\subset X$ olsun. $x_n \to x$ ve $y_n \to y$ ise $d(x_n,y_n)\to d(x,y)$ olduğunu ispatlayınız.

b) $C'[0,1]=\{f:[0,1]\to\mathbb{R} : f$ türevlenebilir ve türevleri sürekli fonksiyon$\}$ olmak üzere $\rho : C'[0,1]\times C'[0,1]\to\mathbb{R}$, $\rho(f,g)=|f(0)-g(0)|+\sup\limits_{t\in[0,1]}|f'(t)-g'(t)|$ fonksiyonu $C'[0,1]$ üzerinde bir metrik midir? İnceleyiniz.

6) a) (X,d) bir metrik uzay, $x,y\in X$, $S\subset X$ ve $S\neq\varnothing$ olsun. Buna göre $d(x,S)\le d(x,y)+d(y,S)$ eşitsizliği ispatlayınız.

b) (X,d) bir metrik uzay olsun. X deki herhangi bir (x_n) Cauchy dizisi için $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d(x_n,x)$ reel sayı serisi yakınsak olacak şekilde bir $x\in X$ noktası bulunabiliyorsa (X,d) metrik uzayının tamlığı hakkında ne söylersiniz? Cevabınızı açıklayınız.

Not: Her soruda a) ve b) şıklarından istediğiniz birini cevaplayınız. 1., 2. 3. ve 4. soru 15 puan, 5. ve 6. soru 20 puandır. Süre 90 dakikadır.

Başarılar...
Doç. Dr. Nilay DEĞİRMEN

FONKSİYONEL ANALİZ ARASINAV CEVAP ANAHTARI

1-) a) $d_\infty(x,y) = \max\{|x_i - y_i| : i = 1,2,\dots,n\}$

$\leq |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n|$

$= \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$

$= d_1(x,y)$

$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n|$

$\leq \max\{|x_i - y_i| : i=1,2,\dots,n\} + \dots + \max\{|x_i - y_i| : i=1,\dots,n\}$

$= n.\max\{|x_i - y_i| : i = 1,2,\dots,n\}$

$= n.\, d_\infty(x,y)$

b) $x = (0,1,0,0,\dots,0)$, $y = (1,0,0,\dots,0)$

$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = 1 + 1 + 0 + \dots + 0 = 2$

$d_\infty(x,y) = \max\{|x_i - y_i| : i = 1,2,\dots,n\} = \max\{1,0\} = 1$

2-) a) (X, d_a) ayrık metrik uzay, $x \in X$

$$B(x,\varepsilon) = \{y \in X : \underset{0 \swarrow \ \searrow 1}{d(x,y)} < \varepsilon\} = \begin{cases} \{x\}, & 0 < \varepsilon \leq 1 \\ X, & 1 < \varepsilon < \infty \end{cases}$$

$\varepsilon > 1$ seçilirse $X \subset B(x,\varepsilon)$ olur. Dolayısıyla X sınırlıdır.

b) $(\mathbb{R}^2, d_a)$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y \leq 5\}$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ alalım. $\left(B((x,y), \tfrac{1}{2}) - \{(x,y)\}\right) \cap A = \emptyset$ olduğundan

$A' = \emptyset$ dir. Bu durumda $\bar{A} = A \cup A' = A$ olup A kapalıdır.

3-) a) (X,d) bir metrik uzay, $A_1, A_2, \dots, A_n$ kapalı küme olsun.

$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ kapalı mıdır?

$A_1, \dots, A_n$ kapalı old. $X - A_1, X - A_2, \dots, X - A_n$ kümeleri açıktır.

Açık kümelerin sonlu kesişimleri de açık olduğundan $\bigcap_{i=1}^{n} (X - A_i)$

kümesi açıktır. $\bigcap_{i=1}^{n} (X - A_i) = X - \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ olduğundan $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ kümesi

kapalıdır.

b) $\mathbb{R}$ üzerinde mutlak değer metriğini ele alalım. $(\mathbb{R}, |.|)$

$A = [0,1]$ için $A^\circ = (0,1)$ dir. $A \subset A^\circ$ sağlanmaz.

CamScanner ile tarandı

4-) a) Notlarda var.

b) $\left(1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{d_2} (1,1)$ mi? $\forall \varepsilon > 0$ verildiğinde

$\forall n \geq n_0$ olduğunda $d_2\left(\left(1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right), (1,1)\right) < \varepsilon$ o.ş. $n_0 \in \mathbb{N}$ var mı?

$$d_2\left(\left(1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right), (1,1)\right) = \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{n^2}} = \frac{\sqrt{2}}{n} \leq \frac{\sqrt{2}}{n_0} < \varepsilon \Rightarrow \frac{n_0}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$n_0 = \left[\left|\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}\right|\right] + 1 \in \mathbb{N}$$

5-) a) $x_n \to x$ old. $\forall \varepsilon > 0$ ver. $\forall n \geq N_1$ old. $d(x_n, x) < \varepsilon/2$ o.ş. $N_1 \in \mathbb{N}$ var.

$y_n \to y$ old. $\forall \varepsilon > 0$ ver. $\forall n \geq N_2$ old. $d(y_n, y) < \varepsilon/2$ o.ş. $N_2 \in \mathbb{N}$ var.

$d(x_n, y_n) \to d(x, y)$ mi? Yani $\forall \varepsilon > 0$ ver. $\forall n \geq N_0$ old. $|d(x_n, y_n) - d(x, y)| < \varepsilon$ o.ş. $N_0 \in \mathbb{N}$ var mı?

$N_0 = \max\{N_1, N_2\}$ seçilirse $\forall n \geq N_0$ için

$$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leq d(x_n, x) + d(y_n, y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olur ve istenen görülür.

b) $\rho: C'[0,1] \times C'[0,1] \to \mathbb{R}$, $\rho(f,g) = |f(0) - g(0)| + \sup_{t \in [0,1]} |f'(t) - g'(t)|$

i) $\rho(f,g) = \underbrace{|f(0) - g(0)|}_{\geq 0} + \underbrace{\sup_{t \in [0,1]} \underbrace{|f'(t) - g'(t)|}_{\geq 0}}_{\geq 0} \geq 0$, $\forall f, g \in C'[0,1]$

ii) $\rho(f,g) = 0 \Leftrightarrow |f(0) - g(0)| + \sup_{t \in [0,1]} |f'(t) - g'(t)| = 0$

$\Leftrightarrow f(0) = g(0)$ ve $f'(t) = g'(t)$, $t \in [0,1]$

$\Leftrightarrow f(0) = g(0)$ ve $f(t) = g(t) + c$, $t \in [0,1]$

$\Leftrightarrow f(t) = g(t)$, $t \in [0,1]$ $\big(f(0) = g(0)$ old. $c = 0\big)$

$\Leftrightarrow f = g$

iii) $\rho(f,g) = |f(0) - g(0)| + \sup_{t \in [0,1]} |f'(t) - g'(t)|$

$= |g(0) - f(0)| + \sup_{t \in [0,1]} |g'(t) - f'(t)|$

$= \rho(g, f)$, $\forall f, g \in C'[0,1]$

iv) $\rho(f,g) = |f(0)-g(0)| + \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)-g'(t)|$

$= |f(0)-h(0)+h(0)-g(0)| + \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)-h'(t)+h'(t)-g'(t)|$

$\leq |f(0)-h(0)| + |h(0)-g(0)| + \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)-h'(t)| + \sup_{t\in[0,1]} |h'(t)-g'(t)|$

$= \rho(f,h) + \rho(h,g)$, $\forall f,g,h \in C'[0,1]$

olduğundan ρ, $C'[0,1]$ üzerinde bir metriktir.

6-) a) $d(x,S) = \inf\{d(x,a) : a \in S\}$

$\leq \inf\{d(x,y) + d(y,a) : a \in S\}$

$= d(x,y) + \inf\{d(y,a) : a\in S\}$

$= d(x,y) + d(y,S)$

b) (x_n) herhangi bir Cauchy dizisi

$\sum_{n=1}^{\infty} d(x_n,x)$ reel sayı serisi yak. old. $d(x_n,x)\to 0$ ve

$x_n \to x$ dir. Dolayısıyla her Cauchy dizisi yak. olup

X bir tam uzaydır.