28.06.2026

Adı-Soyadı:

Numara:

MAT 304 FONKSİYONEL ANALİZ DERSİ BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI

1) $\|.\|:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\|x\|=\dfrac{|x|}{1+|x|}$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde bir norm mudur? Açıklayınız. (15 puan)

2) $a_n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ genel terimli (a_n) dizisi $l_1=\left\{x=(x_n)\subset\mathbb{R}:\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|<\infty\right\}$ kümesine ait midir? Açıklayınız. Ayrıca l_1 uzayında her $x=(x_n)\in l_1$ için $\|x\|_1=\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$ ile tanımlı $\|.\|_1$ normuna göre $\|x+y\|_1^2+\|x-y\|_1^2=2\left(\|x\|_1^2+\|y\|_1^2\right)$ eşitliği her zaman sağlanır mı? Evet ise ispatlayınız, hayır ise örnek veriniz. (15 puan)

3) $\mathbb{R}-\{0,1\}$ kümesi her $x\in\mathbb{R}$ için $\|x\|=|x|$ ile tanımlı $\|.\|$ normuna göre Banach mıdır? Açıklayınız. (15 puan)

4) (X,d) ayrık metrik uzayında d ayrık metriğinin herhangi bir normdan elde edilemeyeceğini gösteriniz. (15 puan)

5) (X,d) bir tam metrik uzay ve $(x_n)\subset X$ olsun. Eğer her $n\in\mathbb{N}$ için $d(x_n,x_{n+1})<\dfrac{1}{2^n}$ ise (x_n) dizisinin X de yakınsak olduğunu gösteriniz. (15 puan)

6) $\mathbb{R}^n$ üzerinde $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ olmak üzere $d_1(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$ ve $d_\infty(x,y)=\max\{|x_i-y_i|:i=1,2,\dots,n\}$ metriklerini ele alalım. $x=(1,1,\dots,1)$, $y=(0,0,0,\dots,0)\in\mathbb{R}^n$ için $d_1(x,y)$ ve $d_\infty(x,y)$ değerlerini bulunuz. (10 puan)

7) $x=(x_1,x_2),y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$ için $d_2(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{2}(x_i-y_i)^2}$ olmak üzere $(\mathbb{R}^2,d_2)$ metrik uzayında $x_n=\left(1-\dfrac{1}{n},1+\dfrac{1}{n}\right)$ genel terimli (x_n) dizisinin $(1,1)\in\mathbb{R}^2$ noktasına yakınsadığını gösteriniz. (15 puan)

Not: Süre 90 dakikadır.

Başarılar...

Doç. Dr. Nilay DEĞİRMEN

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \text{ mu?}$$

$$\left.\begin{aligned} \|\lambda x\| &= \frac{|\lambda x|}{1+|\lambda x|} = \frac{|\lambda| \cdot |x|}{1+|\lambda| \cdot |x|} \\ |\lambda| \cdot \|x\| &= |\lambda| \cdot \frac{|x|}{1+|x|} \end{aligned}\right\}$$

$\lambda = 2$ için eşitlik sağlanmaz.

Norm değil.

6) $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ tane}} = n$

$d_\infty(x,y) = \max\{|x_i - y_i| : i = 1, \ldots, n\} = 1$

3) $x_n = \frac{1}{n+1}$ ile tanımlı $(x_n) \subset \mathbb{R} - \{0,1\}$ dizisini ele alalım.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \notin \mathbb{R} - \{0,1\}$$

(x_n) bir Cauchy dizisidir. Ancak yakınsadığı eleman $\mathbb{R} - \{0,1\}$ de değildir. O halde $\mathbb{R} - \{0,1\}$ Banach olamaz.

2) a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ serisi yakınsaktır. $\left(\frac{1}{3} < 1\right)$ Dolayısıyla

(a_n) dizisi ℓ_1 e aittir.

$$\|x+y\|_1^2 + \|x-y\|_1^2 = 2\left(\|x\|_1^2 + \|y\|_1^2\right)$$ eşitliği

her zaman sağlanmaz. Örneğin;

$x = (-1, 1, 0, 0, \dots)$, $y = (1, 1, 0, 0, \dots)$ alınırsa

$$\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = 1 + 1 = 2$$

$$\|y\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| = 1 + 1 = 2$$

$x+y = (0, 2, 0, 0, \dots)$, $x-y = (-2, 0, 0, \dots)$

$$\|x+y\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n| = 2$$

$$\|x-y\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n| = 2$$

olur. Bu durumda $\|x+y\|_1^2 + \|x-y\|_1^2 = 8$ ve $2\left(\|x\|_1^2 + \|y\|_1^2\right) = 16$

olup eşitlik sağlanmaz.

7) $\left(1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{d_2} (1,1)$ mi? $\forall \varepsilon > 0$ verildiğinde

$\forall n \geq n_0$ olduğunda $d_2\left(\left(1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right), (1,1)\right) < \varepsilon$ o.ş. $n_0 \in \mathbb{N}$ var mı?

$$d_2\left(\left(1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right), (1,1)\right) = \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{n^2}} = \frac{\sqrt{2}}{n} \leq \frac{\sqrt{2}}{n_0} < \varepsilon \Rightarrow \frac{n_0}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$n_0 = \left[\left|\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}\right|\right] + 1 \in \mathbb{N}$$

CamScanner ile tarandı

5) $(x_n) \subset D$ mi? Yani $\forall \varepsilon > 0$ verildiğinde $\forall n, m \geq n_0$ olduğunda $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ var mı?

$n < m$ olsun

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + d(x_{n+2}, x_{n+3}) + \dots + d(x_{m-1}, x_m)$$

$$< \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \dots + \frac{1}{2^{m-1}}$$

$$= \frac{1}{2^n}\left[1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{m-n-1}\right]$$

$$= \frac{1}{2^n}\left[\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{m-n}}{1 - \frac{1}{2}}\right]$$

$$< \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \underbrace{\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{m-n}\right)}_{<1}$$

$$< \frac{1}{2^{n-1}} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon \Rightarrow n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow n_0 = \left[\left|\frac{1}{\varepsilon}\right|\right] + 1 \in \mathbb{N}$$

4) d ayrık metriği bir normdan elde edilseydi; $\forall x \in X$ ve $\forall \alpha \in K$ için

$$d(\alpha x, 0) = \|\alpha x - 0\| = \|\alpha x\| = |\alpha| . \|x\| = |\alpha| . d(x, 0)$$

eşitliği sağlanırdı. Ancak $x \neq 0$ ve $\alpha = 2$ için

$$\left.\begin{aligned} d(2x, 0) &= 1 \\ |2| . d(x, 0) &= 2 \end{aligned}\right\} \text{ olup çelişki elde edilir.}$$