

1. soru	2. soru	3. soru	4. soru	5. soru	6. soru	7.soru	Toplam

Adı Soyadı:

12.06.2025

Numara:

**2024-2025 ÖĞRETİM YILI MAT 314 KOMP. FONK. TEO. GİRİŞ FİNAL
SINAV SORULARI**

- 1) $\lim_{z \rightarrow i} 2 \left(\frac{z^2 + iz + 2}{z - i} \right) = 6i$ olduğunu limit tanımı kullanarak gösteriniz (10 puan).
- 2) a) $\cos(i \arg(1+i))$ değerini $a + ib$ şeklinde yazınız (5 puan).
b) $4e^{2z} + 4e^z - 3 = 0$ denklemini çözünüz (10puan).
- 3) $\left(\frac{in}{n^2 + i} \right)$ ve (i^n) kompleks dizileri yakınsak mıdır? Neden? (15 puan).
- 4) $f(z) = e^z$ fonksiyonun y -eksenine paralel olan doğruyu bir çember üzerindeki noktalara dönüştürdüğünü gösteriniz. (15 puan).
- 5) $f(z) = x^2 + iy^2$ fonksiyonun diferansiyellenebilir olduğu kümeyi adım adım bulunuz. Ayrıca analitik olduğu kümeyi bulunuz (15 puan).
- 6) Harmonik fonksiyon ve harmonik eşlenik tanımlarını yapınız (5 puan)
 $u = x^2 - y^2 - y$ fonksiyonu harmonik midir? Harmonik ise eşleniğini bulunuz (10puan)
- 7) $f(z) = z^{1+i}$ fonksiyonunun analitik olduğu kümeyi (her adımı ayrıntılı açıklayarak) bulunuz (15 puan).

Prof. Dr. Birsen SAĞIR DUYAR

MAT 314 KOMPLEKS FONKSİYONLAR TEORİSİNE GİRİŞ
FİNAL SINAV SORULARI ÇÖZÜMLERİ

1) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ bulmalıyız böyle ki $0 < |z - z_0| = |z - i| < \varepsilon$ iken
 $|f(z) - w| = \left| 2 \cdot \left(\frac{z^2 + iz + 2}{z - i} \right) - 6i \right| < \varepsilon$ olsun.

$$\left| 2 \cdot \left(\frac{z^2 + iz + 2}{z - i} \right) - 6i \right| = \left| 2 \cdot \frac{(z - i)(z + 2i)}{z - i} - 6i \right| = |2(z + 2i) - 6i|$$

$$= |2z - 2i| = 2|z - i| = 2\delta$$

$\delta = \varepsilon/2$ seçilirse istenen olur.

2) a) $\cos\left(i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right) = \cos 0 \cosh\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) - i \sin 0 \cdot \sinh\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$
 $= \cosh\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$

b) $e^z = a \Rightarrow 4a^2 + 4a - 3 = 0 \Rightarrow (2a + 3)(2a - 1) = 0$
 $\Rightarrow 2a = -3, 2a = 1 \Rightarrow a = -3/2, a = 1/2$

$e^z = -\frac{3}{2} \Rightarrow e^{x+iy} = -\frac{3}{2}, |e^z| = \left| -\frac{3}{2} \right| \Rightarrow e^x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \ln \frac{3}{2}$

$\text{Arg } e^z = \text{Arg}\left(-\frac{3}{2}\right) \Rightarrow y = \pi + 2k\pi \quad z = x + iy = \ln \frac{3}{2} + i(\pi + 2k\pi)$

$e^z = \frac{1}{2} \Rightarrow |e^z| = \left| \frac{1}{2} \right| \Rightarrow e^x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$

$\text{Arg } e^z = \text{Arg}\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow y = 2k\pi \Rightarrow z = x + iy = -\ln 2 + i2k\pi$

3) $\frac{in}{n^2 + i} = \frac{i n(n^2 - i)}{(n^2 + i)(n^2 - i)} = \frac{in^3 + n}{n^4 + 1} = \frac{n}{n^4 + 1} + i \frac{n^3}{n^4 + 1} \rightarrow 0 \text{ (} n \rightarrow \infty \text{)}$

$\arg i = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow i = |i| \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \right)$

$i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \Rightarrow i^n = \cos \frac{n\pi}{2} + i \sin \frac{n\pi}{2}$

$(\cos \frac{n\pi}{2}), (\sin \frac{n\pi}{2})$ dizileri $\mathbb{R}$ de yakınsak

olmadığından (i^n) dizisi $\mathbb{C}$ de yakınsak değildir.

$$4) z = x+iy \Rightarrow e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

$$e^z = e^x \cos y + i e^x \sin y$$

y-ek. paralel doğru $x=a$ sabit

$$f(z) = \underbrace{e^a \cos y}_u + i \underbrace{e^a \sin y}_v$$

$$f(z) = u + i v$$

$$\cos y = \frac{u}{e^a}, \sin y = \frac{v}{e^a} \Rightarrow \cos^2 y + \sin^2 y = 1 \Rightarrow \left(\frac{u}{e^a}\right)^2 + \left(\frac{v}{e^a}\right)^2 = 1$$

$$\boxed{u^2 + v^2 = e^{2a}}$$

$$5) D_f = \mathbb{C}, S_f = \mathbb{C}, u(x,y) = x^2, v(x,y) = y^2$$

$$u_x = 2x, u_y = 0, v_x = 0, v_y = 2y$$

$D_2 = \mathbb{C}$ de tanımlı

$$u_x = v_y \Rightarrow 2x = 2y \Rightarrow x = y, u_y = -v_x \Rightarrow 0 = 0$$

$$D_3 = \{x+iy : x=y, x,y \in \mathbb{R}\}$$

$$D = D_1 \cap D_2 \cap D_3 = \{x+iy : x=y, x,y \in \mathbb{R}\}$$

$A = i \cap D = \emptyset$ olup $f(z)$ nin analitik olduğu küme yoktur.

$$6) \begin{cases} u_x = 2x, u_{xx} = 2 \\ u_y = -2y-1, u_{yy} = -2 \end{cases} \Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0 \Rightarrow \text{harmonikdir.}$$

$$u_x = v_y \Rightarrow 2x = v_y \Rightarrow v = \int 2x dy \Rightarrow v = 2xy + \varphi(x)$$

$$u_y = -v_x \Rightarrow -2y-1 = -2y - \varphi'(x) \Rightarrow \varphi'(x) = 1 \Rightarrow \varphi(x) = x + C$$

u nun harmonik eşleniği $v = 2xy + x + C$

$$7) z^{1+i} = e^{(1+i)\log z} = e^{(1+i)(\ln|z| + i \operatorname{Arg} z)}$$

$$D = \mathbb{C} - \{x+iy : x \leq 0, y < 0\}, A = i \cap D = D \text{ dir.}$$