Adı-Soyadı:

Numarası:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | Toplam |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | |

# MAT314 KOMPLEKS FONKSİYONLAR TEORİSİNE GİRİŞ DERSİ ARASINAV SORULARI

1. $\frac{1+z}{1-z}$ ifadesini sadece reel yapan $z \in \mathbb{C}$ kompleks sayılarının kümesini bulunuz.
2. $A = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\} \cup \{z \in \mathbb{C}: |z-5| < 2\}$ kümesini kompleks düzlemde gösteriniz. A açık küme midir? A bölge midir? A' yığılma noktaları kümesini bulunuz.
3. $f(z) = \frac{z^3+iz}{z^2-(1+9i)z-20+5i}$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.
4. $e^z = -2$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.
5. $\log(z+1) = i\frac{\pi}{4}$ denklemini çözünüz.
6. $z \neq 0, t \in \mathbb{R}$ olmak üzere $|z^t| = |z|^t$ olduğunu gösteriniz.
7. $((1+i)^{(1+i)})^{1+i}$ ifadesini reel ve sanal kısımlarına ayırınız.
8. $\frac{(1+i)^7}{(1-i)^{10}}$ sayısını kutupsal formda yazarak $a+ib$ şeklinde ifade ediniz.

Not: Sorular eşit puanlıdır. 16.04.2026

Süre 110 dakikadır.
Başarılar

Çözüm 8. $1+i = 2^{1/2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow (1+i)^7 = 2^{7/2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

$1-i = 2^{1/2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \Rightarrow (1-i)^{10} = 2^5\left(\cos\left(-\frac{10\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{10\pi}{4}\right)\right)$

$$\frac{(1+i)^7}{(1-i)^{10}} = \frac{2^{7/2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)}{2^5\left(\cos\left(-\frac{10\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{10\pi}{4}\right)\right)}$$

$$= 2^{-3/2}\left(\cos\frac{17\pi}{4} + i\sin\frac{17\pi}{4}\right) = 2^{-3/2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 2^{-3/2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{4} + \frac{i}{4}$$

# ARASINAV ÇÖZÜMLERİ

(1) $\frac{1+z}{1-z} = \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow 1+z = \alpha(1-z)$, $z = x+iy \Rightarrow$

$1+(x+iy) = \alpha(1-(x+iy)) \Rightarrow x+1+iy = \alpha - \alpha x - \alpha y i$

$x+1+iy = \alpha(1-x) - \alpha y i \Rightarrow x+1 = \alpha(1-x) \Rightarrow$

$x+1 = \alpha - \alpha x \Rightarrow \alpha x + x + 1 - \alpha = 0$ ve $y = -\alpha y \Rightarrow \alpha y + y = 0$

$x(1+\alpha) + (1-\alpha) = 0$ -- (1)

$y(\alpha+1) = 0$ -- (2)

(2) ifadesinin sıfır olması için $y=0$ veya $\alpha=-1$ olmalı.

$\alpha=-1$ ise (1)den $x(1-1)+(1+1)=0 \Rightarrow 2=0$ olur ki çelişki.

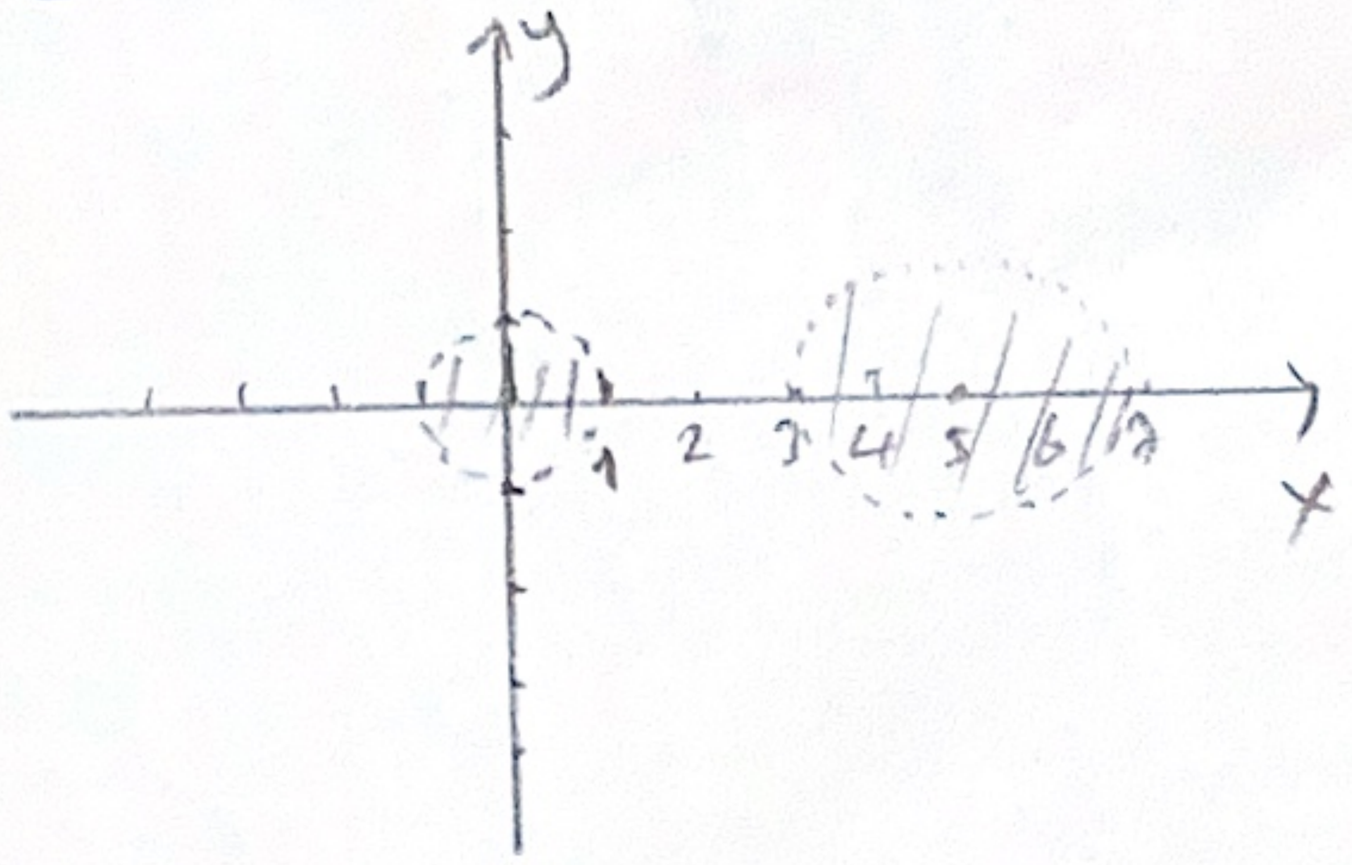
O zaman $\alpha \neq -1$ dir. $y=0$ olmalı.

Aynı şekilde (1) den $x=1$ olamaz. Çünkü $x=1$ olsaydı

$1+\alpha+1-\alpha=0 \Rightarrow 2=0$ olurdu çelişki.

O halde $Im(z)=0$, $Re(z)\neq 1$ olan tüm kompleks sayılar için bu ifade sağlanır. Yani $\boxed{Ç = \mathbb{R}-\{1\}}$ dir.

(2)




şekildeki taralı kısım A kümesidir.

A açık kümedir.

$U = \{z : |z| < 1\}$

$V = \{z : |z-5| < 2\}$

$U \cap V = \emptyset$, $U, V$ açık, $A = U \cup V$ olduğundan A kümesi bağlantılı değildir. Dolayısıyla A bölge değildir.

$A' = \{z : |z| \leq 1\} \cup \{z : |z-5| \leq 2\}$ dir.

$\forall \varepsilon > 0$, $(B(z,\varepsilon) - \{z\}) \cap A \neq \emptyset$ ise $z \in A'$ idi.

(3) $D_f = \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C} : z^2 - (1+9i)z - 20 + 5i = 0\}$

$z^2 - (1+9i)z - 20 + 5i = 0$ $\quad \Delta = b^2 - 4ac = (1+9i)^2 - 4\cdot(-20+5i)$

$= 1 + 18i - 81 + 80 - 20i = -2i$

$z_{1,2} = \frac{1+9i \mp \sqrt{-2i}}{2}$ dir. $w = -2i$ nin kareköklerini bulalım.

$w_{1,2} = \mp\left[\sqrt{\frac{-0+\sqrt{4}}{2}} - i\sqrt{\frac{0+\sqrt{4}}{2}}\right] = \mp(1-i) \Rightarrow$

$z_1 = \frac{(1+9i)+(1-i)}{2} = 1+4i$ ve $z_2 = \frac{(1+9i)-(1-i)}{2} = 5i$

$\boxed{D_f = \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C} : z = 1+4i,\ z = 5i\}}$

4) $e^z = -2 \iff e^x(\cos y + i\sin y) = -2 + i0 \Rightarrow e^x \cos y = -2$ --(1)
$e^x \sin y = 0$ --(2)

(2) de $\forall x \in \mathbb{R}$ için $e^x > 0$ olduğundan $\sin y = 0 \Rightarrow y = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

olur. (1) de yerine yazılırsa

$e^x \cos y = e^x \cos(k\pi) = e^x (-1)^k = -2$ olması için $k = 2n+1, n \in \mathbb{Z}$

olmalıdır. Böylece $e^x = 2 \Rightarrow x = \ln 2$

O halde $e^z = -2$ nin çözüm kümesi

$\boxed{\{(x,y) : x = \ln 2,\ y = (2n+1)\pi,\ n \in \mathbb{Z}\}}$ olur.

5) $\mathrm{Log}(z+1) = \ln|z+1| + i\,\mathrm{Arg}(z+1) = i\pi/4 \Rightarrow \ln|z+1| = 0$ ve $\mathrm{Arg}(z+1) = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \arctan \frac{y}{x+1} = \frac{\pi}{4}$ olmalı. $\Rightarrow$

$(x+1)^2 + y^2 = 1$ ve $\frac{y}{x+1} = \tan\frac{\pi}{4} = 1$ olur. $\Rightarrow$ Bu iki

denklem birlikte çözülürse $x = \frac{1}{\sqrt{2}} - 1,\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ bulunur.

$\Rightarrow \boxed{z = \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}i}$ dır.

6) $z \neq 0, t \in \mathbb{R}, |z^t| = |z|^t$ dır:

$z^t = e^{t\log z} = e^{t(\ln|z| + i\arg z)} = e^{t\ln|z|} \cdot e^{it\arg z} = |z|^t \cdot e^{it\arg z}$

$\Rightarrow |z^t| = \left||z|^t \cdot e^{it\arg z}\right| = |z|^t \cdot |e^{it\arg z}| = |z|^t \Rightarrow |z^t| = |z|^t$ olur.

7. $z = \left((1+i)^{(1+i)}\right)^{(1+i)} = (1+i)^{(1+i)(1+i)} = (1+i)^{(1+i)^2} = (1+i)^{2i}$

$|1+i| = \sqrt{2},\ \theta = \pi/4,\ 1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$1+i = \sqrt{2} \cdot e^{i\pi/4}$

$(1+i)^{2i} = (\sqrt{2})^{2i} \cdot e^{(i\pi/4)2i}$

$(\sqrt{2})^{2i} = e^{2i\log\sqrt{2}}$ , $\left(e^{i\pi/4}\right)^{2i} = e^{-\pi/2} \Rightarrow$

$(1+i)^{2i} = e^{-\pi/2}\left(\cos(\ln 2) + i\sin(\ln 2)\right)$

$\boxed{\mathrm{Re}\, z = e^{-\pi/2}\cos(\ln 2)}$ $\boxed{\mathrm{Im}\, z = e^{-\pi/2}\sin(\ln 2)}$