Ad-soyad : Cevap Anahtarı

Numara : **Lineer Cebir II Final Sınavı Soruları** **02.07.2024**

NOT : Süre 90 dakikadır. Sorularda belirtilen yöntemler dışında yapılan çözümler kabul edilmeyecektir. Cevaplarınızı ayrıntılı olarak yazınız. Başarılar.

1) Aşağıdaki ifadelerin yanına doğru ise D, yanlış ise Y'yazınız.

(D) Bir vektör uzayında bir vektörün koordinatları bazlar değiştikçe değişir (4 p).

(Y) Boyutları farklı olan vektör uzayları birbirlerine izomorf olabilir (4 p).

(D) Ortonormal bir kümede sıfır vektörü bulunmaz (4 p).

(D) İki vektör uzayı arasındaki tüm lineer dönüşümlerin kümesi bir vektör uzayıdır (4 p).

(Y) Her matrisin öz değerleri ve öz vektörleri vardır (4 p).

2) $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ olsun. $\forall X\in\mathbb{R}^{2x2}$ matrisi için $L(X)=AX-XA$ olarak tanımlanan $L:\mathbb{R}^{2x2}\to\mathbb{R}^{2x2}$ fonksiyonu veriliyor.

a) L nin lineer dönüşüm olduğunu gösteriniz (10 p).

b) L nin $\mathbb{R}^{2x2}$ deki standart baza göre matris gösterimini bulunuz (10 p).

3) $L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\ L(x,y,z)=(2x-y,2y,4x+z)$ lineer dönüşümünün

a) öz değerlerini (7 p),
b) öz vektörlerini bulunuz (7 p).
c) Köşegenleştirilebilir midir? Açıklayınız (6 p).

4) $A=\begin{bmatrix}1 & 5 & 2\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ matrisi veriliyor.

a) A matrisinin karakteristik polinomunu (7 p),

b) A matrisinin minimal polinomunu (7 p),

c) Cayley – Hamilton teoremini kullanarak eğer varsa A matrisinin tersini bulunuz (6 p).

5) L, derecesi 3 veya daha küçük polinomlar vektör uzayı üzerinde $L(1)=1+t$, $L(t)=t+t^2$, $L(t^2)=t^2+t^3$, $L(t^3)=1$ eşitliklerini sağlayan lineer dönüşüm olsun. $L(2-t+t^2-t^3)$ ü hesaplayınız (10 p).

6) A ve B kare matrisleri için $P^{-1}AP=B$ olacak şekilde tersi olan bir P kare matrisi varsa A matrisi B matrisine benzerdir denir. Benzer matrislerin minimal polinomlarının aynı olduğunu gösteriniz (20 p).

SORU2 : $L(X) = AX - XA$ $X, Y \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

a) i) $L(X+Y) = L(X) + L(Y)$

ii) $L(cX) = c.L(X)$ $\forall c \in \mathbb{R}$

i) $L(X+Y) = A(X+Y) - (X+Y)A$

$$= \underbrace{AX - XA}_{L(X)} + \underbrace{AY - YA}_{L(Y)}$$

ii) $L(cX) = AcX - cXA$

$= c\,AX - XA$

$= c.L(X)$

olup lineer dönüşümdür.

b) $\mathbb{R}^{2\times 2}$ nin standart bazı $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

$$L\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 0.\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 1.\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0.\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= -2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 3.\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0.\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 1.\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = -1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0.\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = 0.\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0.\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olup

standart baza göre matris gösterimi

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ dir.

Soru 3: $L: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) \longrightarrow L(x,y,z) = (2x-y, 2y, 4x+z)$

$L(X) = \lambda X$

a) $\underbrace{L(x,y,z)} = \lambda (x,y,z)$

$(2x-y, 2y, 4x+z) = \lambda (x,y,z)$

$$\begin{aligned} 2x-y &= \lambda x \\ 2y &= \lambda y \\ 4x+z &= \lambda z \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} (2-\lambda)x - y &= 0 \\ (2-\lambda)y &= 0 \\ 4x + (1-\lambda)z &= 0 \end{aligned} \quad \text{-- } (*)$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 4 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(1-\lambda) = 0$$

$\left.\begin{aligned} \lambda_1 = 2 = \lambda_2 \\ 1 = \lambda_3 \end{aligned}\right\}$ öz değer

b) $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ için öz vektörler:

$*$ denk. $\lambda = 2$ yazalım.

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ 4x - z &= 0 \\ 4x &= z \end{aligned}$$

$X = (x,y,z) = (x, 0, 4x) \quad x \in \mathbb{R}$

$= \{(x,0,4x) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\}$

$= sp\{(1,0,4)\}$

$\lambda_3 = 1$ için öz vektör:

$X = (0,0,z) \quad z \in \mathbb{R}$

$\{(0,0,z), z \in \mathbb{R}\} = sp\{(0,0,1)\}$

$S = \{(1,0,4), (0,0,1)\}$ sistemi $\mathbb{R}^3$ ün bazı olmadığı için köşegenleştirilemez.

SORU 4) $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

a) $$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -5 & -2 \\ 0 & \lambda+1 & -2 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-1)$$
$$= (\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

b) Karakteristik polinomun kökleri -1 ve 1. Onakla minimal polinomun kökleri de aynı olmalı.

Bu durumda minimal polinom karakteristik polinomu, bölen ama aynı köke sahip polinom olup ya

$(\lambda-1)(\lambda+1)$ ya da $(\lambda-1)^2(\lambda+1)$ dır

$$(A-I_3)(A+I_3) \neq 0$$
$(A-I_3)^2(A+I_3) = 0$ olup $(\lambda-1)^2(\lambda+1)$ minimal polinomdur.

c) $|\lambda I - A| = (\lambda-1)^2(\lambda+1) = (\lambda^2-2\lambda+1)(\lambda+1) = \lambda^3+\lambda^2-2\lambda^2-2\lambda+\lambda+1$

Cayley-Hamilton teoremine göre $= \lambda^3-\lambda^2-\lambda+1$

$$A^3 - A^2 - A + I_3 = 0$$

A matrisinin karakteristik polinomunun sabit terimi sıfırdan farklı olduğundan A matrisi terslenebilirdir. O halde

$$A^2 - A - I_3 + A^{-1} = 0$$
$$A^{-1} = -A^2 + A + I_3$$

$$A^{-1} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -12 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Soru 5 : $L(1) = 1+t$

$L(t) = t+t^2$

$L(t^2) = t^2+t^3$

$L(t^3) = 1$

$\{1, t, t^2, t^3\}$

$$L(2-t+t^2-t^3) = L(2.1 - 1.t + 1.t^2 - 1.t^3)$$

$$= 2.L(1) - 1.L(t) + 1.L(t^2) - 1.L(t^3)$$

$$= 2.(1+t) - 1.(t+t^2) + 1.(t^2+t^3) - 1.1$$

$$= 2+2t-t-\cancel{t^2}+\cancel{t^2}+t^3-1$$

$$= 1+t+t^3 \ \#$$

SORU 6: A ve B benzer matris ise

$$B = P^{-1}AP \text{ dır.}$$

Eğer $m_A(x)$, A matrisinin minimal polinomu ise

$$m_A(x) = 0 \text{ dır.}$$

Benzer matris B için $B = P^{-1}AP$ olduğundan $m_A(P^{-1}AP) = 0$ olmalı

$$m_A(B) = m_A(P^{-1}AP)$$

Burada

// $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$

$$f(P^{-1}AP) = a_0 I + a_1 (\overbrace{P^{-1}AP}^{I}) + a_2 (P^{-1}AP)^2 + \cdots a_n (P^{-1}AP)^n$$

$$(P^{-1}AP)^n = (P^{-1}A\overbrace{P)(P^{-1}}^{I}A\overbrace{P)}^{I} \cdots (P^{-1}AP)$$

$$= P^{-1}A^n P$$

mantığıyla $f(B) = f(P^{-1}AP) = P^{-1}f(A)P$

Kullanırsa

$$m_A(B) = m_A(P^{-1}AP) = P^{-1} m_A(A) P$$

olur $m_A(A) = 0$ olduğundan $m_B(A) = 0$ bulunur