**Ad Soyad:**

**Numara:** **30.05.2019**

**MAT 324 MATRİSLER TEORİSİ FİNAL SINAVI SORULARI**

**1.** Benzer matrislerin karakteristik değerlerinin aynı olduğunu gösteriniz.

**2.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & -3 \end{bmatrix}$ matrisini A=LU biçiminde yazınız.

**3.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & -2 \\ 5 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin karakteristik değer ve bu değerlere karşılık gelen karakteristik vektörlerini bulunuz.

**4.** $\begin{aligned} mx + y + z &= 1 \\ x + my + z &= 1 \\ x + y + mz &= 1 \end{aligned}$ sisteminin çözümünü asli-ilaveli asli determinatlar yardımıyla irdeleyiniz.

**Not:** Her soru eşit puanlıdır. *BAŞARILAR.*

**Süre:** 75 dk

CEVAPLAR

30.05.2019

# MATRİSLER TEORİSİ FİNAL SINAVI CEVAP ANAHTARI

1) Benzer matrislerin karakteristik değerlerinin aynı olduğunu gösteririz.

A ve B benzer matrisler olsunlar. Benzer matris tanımından P regüler matrisi için

$$B = P^{-1}AP$$

yazılabilir. A ve B nin karakteristik polinomları olan $P_A(\lambda)$ ve $P_B(\lambda)$ nın aynı olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} P_B(\lambda) = \det(\lambda I_n - B) &= \det(\lambda I_n - P^{-1}AP) \\ &= \det(\lambda P^{-1}P - P^{-1}AP) \\ &= \det P^{-1} . \det(\lambda I_n - A) . \det P \\ &= \frac{1}{\det P} \det(\lambda I_n - A) \det P \\ &= \det(\lambda I_n - A) = P_A(\lambda) \end{aligned}$$

2)

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & -3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{array} \end{array} \qquad A = LU$$

Önce U yu bulalım.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & -3 \end{bmatrix} \overset{E}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -6 & -7 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -15 \end{bmatrix} = U$$

$E$: $\alpha_2 \to \alpha_2 - 2\alpha_1$
$\alpha_3 \to \alpha_3 - \alpha_1$
$\alpha_4 \to \alpha_4 - 3\alpha_1$

L yi bulalım

$$L=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & -3 \end{bmatrix} \overset{\mathcal{E}_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & -6 & -7 \\ 1 & 0 & -3 & -3 \\ 3 & 0 & 0 & -15 \end{bmatrix} \overset{\mathcal{E}_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -6 & -7 \\ 1 & 0 & -3 & -3 \\ 3 & 0 & 0 & -15 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\mathcal{E}_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & -3 \\ 3 & 0 & 0 & -15 \end{bmatrix} \overset{\mathcal{E}_4}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix} \overset{\mathcal{E}_5}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathcal{E}_1$: $\beta_2 \to \beta_2 - 2\beta_1$
$\beta_3 \to \beta_3 - 3\beta_1$
$\beta_4 \to \beta_4 - 4\beta_1$

$\mathcal{E}_2$: $\beta_2 \to -\frac{1}{5}\beta_2$

$\mathcal{E}_3$: $\beta_3 \to \beta_3 + 6\beta_2$
$\beta_4 \to \beta_4 + 7\beta_2$

$\mathcal{E}_4$: $\beta_3 \to -\frac{1}{3}\beta_3$
$\beta_4 \to \beta_4 + 3\beta_3$

$\mathcal{E}_5$: $\beta_4 \to \frac{1}{15}\beta_4$

Sağlaması

$$A = L.U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -6 & -7 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & -3 \end{bmatrix}$$

8. $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & -2 \\ 5 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin karakteristik değer ve karakteristik vektörleri

$$P_A(\lambda) = |\lambda I_3 - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -5 \\ -2 & \lambda+2 & 2 \\ -5 & 2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-6)(\lambda+6)=0$$

Karakteristik değerleri

$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 6 \quad \lambda_3 = -6$ dır.

$\lambda_1 = 0$ için $\quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

$A(\alpha) = \lambda\alpha$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & -2 \\ 5 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 5\alpha_3 = 0$$
$$2\alpha_1 - 2\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0$$
$$5\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \\ 5 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & 0 \\ 0 & -12 & -24 & 0 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \end{array} \qquad \alpha_3 = t$$

$$\alpha_1 = -t \qquad \alpha_2 = -2t \qquad \alpha_3 = t$$

$$\Rightarrow \alpha = t\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ alınabilir.}$$

Benzer şekilde $\lambda_2 = 6$ için

$A(\alpha) = \lambda\alpha$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 5\alpha_3 = 6\alpha_1 \\ 2\alpha_1 - 2\alpha_2 - 2\alpha_3 = 6\alpha_2 \\ 5\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 = 6\alpha_3 \end{array}\right\} \alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_3 = -6$ için ise $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ bulunur.

4- $mx+y+z=1$

$x+my+z=1$

$x+y+mz=1$

Katsayılar matrisi A olsun.

$$\det A = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = (m-1)^2(m+2) \text{ dir.}$$

1) $m \neq 1$ ve $m \neq -2$ ise $\det A \neq 0$ olup sistemin tek çözümü vardır.

2) $m=1$ ise $\operatorname{rank} A = 1$ dir.

$\delta_1 = |m| = |1| \neq 0$

$\delta_{1+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ çözüm vardır.

$x+y+z=1$ $y=t$, $z=k$ $x=-t-k$

3) $m=-2$ ise $\det A = 0$ $\operatorname{rank} A = 2$

$\delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ $\delta_{2+1} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

Çözüm yoktur.