

Ad-Soyad :  
Numara :

**Öklidven Olmayan Geometri Final Sınavı Cevap Anahtarı      02.06.2026**

**NOT: Her soru 20 puan olup süre 90 dakikadır. Başarılar dilerim.**

- 1) Öklid'in paralellik postülatına denk olan Playfair postülatına göre düzlemde bir doğruya dışındaki bir noktadan bir tek paralel çizilebilir.  $S^2$  ve  $H^2$  için durum nasıldır?
- 2) Hiperbolik düzlemde  $X = (2, 2, 3) \in H^2$  noktası ve  $h = (1, 0, 0)$  kutuplu  $m$  doğrusu veriliyor.
  - a)  $X$  noktasının  $m$  doğrusuna göre yansıması olan  $Q$  noktasını bulunuz.
  - b)  $X$  ve  $Q$  noktalarından geçen  $\overline{XQ}$  doğrusunu bulunuz.
- 3)  $H^2$  de kutbu  $h = (1, 0, 0)$  olan  $m$  doğrusu ve bu doğru üzerinde olmayan  $P = (-2, -2, 3) \in H^2$  noktası veriliyor.  $P$  noktasından geçen ve  $m$  doğrusuna ultraparalel olan bir doğru bulunuz.
- 4)  $S^2$  de  $h_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$  ve  $h_2 = \left( 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$  kutuplu doğruları dik kesen doğruyu bulunuz.
- 5)  $H^2$  de paralel iki doğru bulunuz.

## Seraplar

1)  $S^2$  de bir doğruya dırindaki bir noktadan paralel çizilemez.  $H^2$  de ise birden fazla paralel çizilebilir.

$$2) a) \Theta = \Omega_m X = X - 2b(X, h)h = (2, 2, 3) - 2b((2, 2, 3), (1, 0, 0))h \\ = (2, 2, 3) - 4(1, 0, 0) = (-2, 2, 3)$$

b)  $\overleftrightarrow{X\Theta}$  nun kutbu  $k$  olsun.

$$X, \Theta \in \overleftrightarrow{X\Theta} \Leftrightarrow b(X, k) = b(\Theta, k) = 0 \Leftrightarrow k = \lambda(\Theta \times X)$$

$$\Theta \times X = \begin{vmatrix} -e_1 & -e_2 & e_3 \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (0, -12, -8)$$

$$|\Theta \times X| = \sqrt{|b(\Theta \times X, \Theta \times X)|} = \sqrt{10^2 + (-12)^2 + (-8)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow k = \frac{\Theta \times X}{|\Theta \times X|} = \frac{1}{4\sqrt{5}}(0, -12, -8) = (0, -\frac{3}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})$$

0 halde,  $\overleftrightarrow{X\Theta}$  doğrusu  $k = (0, -\frac{3}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})$  kutuplu doğrudur.

3) Aranılan doğru  $n$  ve kutbu  $k = (k_1, k_2, k_3)$  olsun.

$$k \text{ birim spacelike} \Leftrightarrow k_1^2 + k_2^2 - k_3^2 = 1 \quad \dots (1)$$

$$P \in n \Leftrightarrow b(P, k) = 0 \Leftrightarrow b((-2, -2, 3), (k_1, k_2, k_3)) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2k_1 - 2k_2 - 3k_3 = 0 \Leftrightarrow 2k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 0 \quad \dots (2)$$

$n$  ve  $n$  ultraparalel  $\Leftrightarrow h \times k$  spacelike

$$h \times k = \begin{vmatrix} -e_1 & -e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{vmatrix} = (0, k_3, k_2) \text{ spacelike} \Leftrightarrow k_3^2 - k_2^2 > 0 \\ \Leftrightarrow k_3^2 > k_2^2 \quad \dots (3)$$

$k_2 = 0$  alalım.

$$\left. \begin{array}{l} (1) \text{ den } k_1^2 - k_3^2 = 1 \\ (2) \text{ den } 2k_1 + 3k_3 = 0 \\ (3) \text{ den } k_3^2 > 0 \end{array} \right\} \text{ Aynı anda sağlanmalıdır.}$$

Yukarıdaki 2. eşitlikten  $k_1 = -\frac{3}{2}k_3$  olup 1. eşitlikte yerine yazılırsa

$$\frac{9}{4}k_3^2 - k_3^2 = 1 \Rightarrow \frac{5}{4}k_3^2 = 1 \Rightarrow k_3 = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$k_3 = \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ için } k_1 = -\frac{3}{2}k_3 = -\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{3}{\sqrt{5}}$$

O halde  $k = (k_1, k_2, k_3) = (-\frac{3}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}})$  kütuplu  $n$  doğrusu  $P = (-2, -2, 3) \in H^2$  noktasından geçen ve  $n$  doğrusuna ultraparalel olan bir doğrudur.

$$\begin{array}{lcl} 4) & h_1 & \text{kütuplu doğru } l_1 \\ & h_2 & \text{" " " } l_2 \end{array}$$

Aranılan doğru ise  $k$  kütuplu  $n$  doğrusu olsun.

$$n \perp l_1, n \perp l_2 \Leftrightarrow \langle k, h_1 \rangle = \langle k, h_2 \rangle = 0 \Leftrightarrow k = \pm \frac{h_1 \times h_2}{|h_1 \times h_2|}$$

$$h_1 \times h_2 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{vmatrix} = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

$$|h_1 \times h_2| = \langle h_1 \times h_2, h_1 \times h_2 \rangle^{1/2} = \sqrt{(-\frac{1}{2})^2 + (-\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow k = \frac{h_1 \times h_2}{|h_1 \times h_2|} = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) \text{ ararılan doğrunun kütubudur.}$$

5)  $H^2$  de iki doğrunun paralel olması için kutuplarının b alanında vektörel çarpımının null olması gerekir.

$h = (1, 0, 0)$  kutuplu  $L$  doğrusuna paralel olan  $k = (k_1, k_2, k_3)$  kutuplu bir  $m$  doğrusu bulalım:

$$h \times k = \begin{vmatrix} -e_1 & -e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{vmatrix} = (0, k_3, k_2) \text{ null} \Leftrightarrow k_3^2 - k_2^2 = 0 \\ \text{ve } k_2 \neq 0 \neq k_3$$

$$\Leftrightarrow k_3 = \pm k_2 \neq 0$$

Diğer taraftan  $k$  birim spacelike vektör olmalıdır. Bunun için  $b(k, k) = 1$  olmalıdır. Buradan

$$k_1^2 + k_2^2 - k_3^2 = 1 \text{ denektir.}$$

$k_3 = \pm k_2$  için bu eşitlik  $k_1^2 = 1 \Leftrightarrow k_1 = \pm 1$  halini alır. 0 haldey  $\forall k_2 \in \mathbb{R} (k_2 \neq 0)$  için  $k = (\pm 1, k_2, \pm k_2)$  kutuplu  $m$  doğrusu,  $h = (1, 0, 0)$  kutuplu  $L$  doğrusuna paraleldir. Örneğin  $k = (1, 1, 1)$  kutuplu  $m$  doğrusu ile  $h = (1, 0, 0)$  kutuplu  $L$  doğrusu paraleldir.