7.01.2025

Sayılar Teorisi Final Sınavı Soruları

1-) $7x+4y+9z=11$ Diophant denklemin genel çözümünü bulunuz.

2-) modülo 41 primitif kök $\alpha=6$ ise bunu dikkate alarak $x^{31}\equiv 40 \pmod{41}$ kongrüansının çözümünü bulunuz.

3-) $f(x)=x^3+19x^2-x+23\equiv 0 \pmod{7^3}$ polinom kongrüansının mod7 kökü $b=2$ olduğuna göre mod7^3 kökünü bulunuz.

4-) a) $\left(\frac{885}{131}\right)=?$

b) $\sqrt{17}$ sayısını sürekli kesre açınız.

5-) a) $[1,\overline{2,1}]$ olan irrasyonel sayıyı bulunuz

b) p ve q farklı asallar olsun. $n=p^{\alpha}\cdot q^{\beta}$ $(\alpha\neq\beta,\ \alpha,\beta\geq 1)$ olmak üzere n^2 sayısının pozitif bölenleri sayısı 81 ise n^3 sayısının pozitif bölen sayısı kaçtır?

Not: Sorular eşit puanlıdır.

Başarılar dilerim.

Cevap Anahtarı

1) $a_1=7,\ a_2=4,\ a_3=9$ $\quad d=(7,4,9)=1$ $\quad d_1=(4,9)=1$

$\beta=-\frac{a_3}{d_1}=-9$ $\quad \delta=4$ $\quad 4\alpha+9\gamma=1,\ \alpha=-2,\ \gamma=1$

$y=-2t-9u$ $\quad z=t+4u,$ $\quad 7x+t=11$ $\quad x_0=1,\ t_0=4$

$x=1+v$ $\quad y=4-7v$

$x=1+v$

$y=-8-14v-9u$

$z=4-7v+4u$

2- $x^{31} \equiv 40 \pmod{41}$

$31\,\text{ind}x \equiv \text{ind}40 \pmod{40} \Rightarrow 31\,\text{ind}x \equiv 20 \pmod{40}$

$40 = 1.31+9$ $\qquad 1 = 7.40 - 9.31 \Rightarrow 20 = 140.40 - 180.31$

$31 = 3.9+4$

$9 = 2.4+1$ $\qquad \text{ind}x = 20 \Rightarrow x = 40$ bulunur.

3- $f(x) = x^3 + 19x^2 - x + 23 \equiv 0 \pmod{7^3}$, $f'(x) = 3x^2 + 38x - 1$

$f(2) = 105 \quad f'(2) = 87$

$87k \equiv \frac{-105}{7} \pmod 7 \quad 3k \equiv -1 \pmod 7 \quad k \equiv 2 \pmod 7$

$x = 2 + 2.7 = 16 \pmod{49}$

$b' = 16 \qquad f(16) = 8967 \qquad f'(16) = 1375$

$1375k \equiv -\frac{8967}{49} \pmod 7 \qquad 3k \equiv -183 \pmod 7$

$k \equiv 2 \pmod 7 \qquad x = 16 + 2.49 \equiv 114 \pmod{7^3}$

4- a) $\left(\frac{885}{131}\right) = \left(\frac{99}{131}\right) = \left(\frac{3^2.11}{131}\right) = \left(\frac{11}{131}\right) = 1$

$\left(\frac{11}{131}\right)^1 . \left(\frac{131}{11}\right)^{-1} = -1 \qquad \left(\frac{131}{11}\right) = \left(\frac{10}{11}\right) = \left(\frac{2}{11}\right)^{-1} . \left(\frac{5}{11}\right)^{1} = -1$

$\left(\frac{5}{11}\right)^1 . \left(\frac{11}{5}\right)^1 = 1 \qquad \left(\frac{11}{5}\right) = \left(\frac{1}{5}\right) = 1$

b) $\sqrt{17} = [4, \overline{8}]$

5- a) $[1, \overline{2,1}] = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

b) $n = p^{\alpha}.q^{\beta} \Rightarrow n^2 = p^{2\alpha}.q^{2\beta} \qquad (2\alpha+1)(2\beta+1) = 3.27$

$\alpha = 1 \quad \beta = 13$

$n^3 = p^{3\alpha}.q^{3\beta} \qquad (3\alpha+1)(3\beta+1) = 4.40 = 160$ bulunur.