Ad-Soyad: **04.01.2025**
Numara:

SOYUT MATEMATİK I FİNAL SORULARI

1) a) $\left[p \Rightarrow q \wedge s' \wedge r\right] \Rightarrow \left[p' \vee \left(s \wedge q'\right)\right]$ önermesinin yanlış olduğu bilindiğine göre p,q,s,r önermelerinin doğruluk değerlerini bulunuz (10p).

b) Bir A kümesi için $A \cap \varnothing = \varnothing$ olduğunu gösteriniz (10p).

2) $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$,

$$\tau = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}^*,\ x.y > 0\}$$

$\mathbb{R}^*$ üzerinde bir bağıntı olmak üzere eğer varsa $\frac{1}{2}$ sayısının denklik sınıfını bulunuz (20p).

3) $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ bire-bir ve örten bir fonksiyon olmak üzere

$$g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$
$$(x,y) \longmapsto g(x,y) = \big(f(2x-1), f(2y+1)\big)$$

şeklinde tanımlanan g fonksiyonu bire-bir ve örten olur mu? Gösteriniz (20p).

4) a) $(\mathbb{R}^+, \div)$, $(\mathbb{Z} - \{1\}, +)$ cebirsel yapıları değişmeli grup mudur? Gösteriniz (5p).

b) $\mathbb{Z}$ de

$$a \odot b = \begin{cases} a+b-2, & a+b \text{ çift ise}, \\ \dfrac{ab}{2}, & a+b \text{ tek ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $\odot$ işleminin özelliklerini inceleyiniz (15p).

5) a) α ve β, X den Y ye iki bağıntı ise $\alpha \cup \beta$, X den Y ye bir bağıntı olur mu? Gösteriniz (5p).

b) A kümesi üzerinde tanımlı bir sıralama bağıntısının tersi de sıralama bağıntısı olur mu? Gösteriniz (15p).

NOT: Sınav süresi 110 dakikadır.

BAŞARILAR

CEVAPLAR

1) a) $\Rightarrow, \wedge, \vee$ bağlaçlarının özellikleri kullanılarak

$$p \equiv 1, \quad q \equiv 1, \quad s \equiv 0, \quad r \equiv 1$$

olduğu elde edilir.

b) $A \cap B \subseteq B$ olduğunu biliyoruz. $B = \emptyset$ alınırsa

$$A \cap \emptyset \subseteq \emptyset \quad \dots \text{①}$$

elde edilir. $\emptyset$, her kümenin alt kümesi olduğundan

$$\emptyset \subseteq A \cap \emptyset \quad \dots \text{②}$$

dır.

① ve ② den $A \cap \emptyset = \emptyset$ elde edilir.

2) • $\forall x \in \mathbb{R}^*$ için $x^2 > 0 \Rightarrow x \cdot x > 0$ olduğundan $(x,x) \in \tau$ olup, τ yansıyandır.

• $\forall x, y \in \mathbb{R}^*$ için $(x,y) \in \tau \Rightarrow (y,x) \in \tau$?

$$\begin{aligned}(x,y) \in \tau &\Rightarrow x \cdot y > 0 \\ &\Rightarrow y \cdot x > 0 \\ &\Rightarrow (y,x) \in \tau\end{aligned}$$

$\therefore$ τ simetriktir.

• $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^*$ için $(x,y) \in \tau$ ve $(y,z) \in \tau \Rightarrow (x,z) \in \tau$?

$$\left.\begin{aligned}(x,y) \in \tau &\Rightarrow x \cdot y > 0 \\ (y,z) \in \tau &\Rightarrow y \cdot z > 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow (xy)(yz) > 0$$

$$\Rightarrow x y^2 z > 0$$

$$\Rightarrow x \cdot z > 0, \quad (y^2 > 0)$$

$$\Rightarrow (x,z) \in \tau$$

$\therefore$ τ geçişkendir.

$\therefore$ τ bir denklik bağıntısıdır.

$$\overline{\tfrac{1}{2}} = \{ y \in \mathbb{R}^* : \tfrac{1}{2} \sim y \}$$
$$= \{ y \in \mathbb{R}^* : \tfrac{1}{2} \cdot y > 0 \}$$
$$= \{ y \in \mathbb{R}^* : y > 0 \}$$
$$= \mathbb{R}^+$$

3) <u>g 1-1 mi?</u>

$\forall (a,b), (x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ için

$$g(a,b) = g(x,y) \Rightarrow (a,b) = (x,y) \; ?$$
$$g(a,b) = g(x,y) \Rightarrow \big(f(2a-1), f(2b+1)\big) = \big(f(2x-1), f(2y+1)\big)$$
$$\Rightarrow f(2a-1) = f(2x-1), \quad f(2b+1) = f(2y+1)$$
$$\underset{f\ 1\text{-}1}{\Rightarrow} 2a-1 = 2x-1, \quad 2b+1 = 2y+1$$
$$\Rightarrow a = x, \quad b = y$$
$$\Rightarrow (a,b) = (x,y)$$

$\therefore$ g 1-1 dir.

- <u>g örten mi?</u>

$\forall (x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ için $\exists (a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \ni g(a,b) = (x,y)$

olmalı. f örten olduğundan $\forall y \in \mathbb{Z}$ için $\exists x \in \mathbb{Z} \ni f(x) = y$ dir.

$$(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Z} \text{ ve } y \in \mathbb{Z}$$
$$\Rightarrow \exists a \in \mathbb{Z} \ni f(2a-1) = x \text{ ve } \exists b \in \mathbb{Z} \ni f(2b+1) = y, \quad f \text{ örten}$$
$$\Rightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \ni \big(f(2a-1), f(2b+1)\big) = (x,y)$$
$$\Rightarrow g(a,b) = (x,y)$$

$\therefore$ g örtendir.

4) a) • $1, 3, 6 \in \mathbb{R}^+$

$6 \div (1 \div 3) = 18$ $(6 \div 1) \div 3 = 6 \div 3 = 2$

olduğundan birleşme özelliği sağlanmaz.

• $-2, 3 \in \mathbb{Z} - \{1\}$, $3 + (-1) = 1 \notin \mathbb{Z} - \{1\}$ olduğundan

+ kapalı değildir.

b) • $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ için

$a+b$ çift $\Rightarrow a+b-2 \in \mathbb{Z}$

$a+b$ tek $\Rightarrow ab$ çift $\Rightarrow \frac{ab}{2} \in \mathbb{Z}$

$\therefore$ $\odot$ işlemi kapalıdır

• $1, 4, 6 \in \mathbb{Z}$

$(4 \odot 6) \odot 1 = 8 \odot 1$
$= 4$

$4 \odot (6 \odot 1) = 4 \odot 3$
$= 6$

olduğundan $\odot$ işleminin birleşme özelliği yoktur.

• $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ için

$a+b$ çift ise $a \odot b = a+b-2 = b+a-2 = b \odot a$

$a+b$ tek ise $a \odot b = \frac{ab}{2} = \frac{ba}{2} = b \odot a$

olup $\odot$ işleminin değişme özelliği vardır.

• $\exists e \in \mathbb{Z} \ni \forall a \in \mathbb{Z}$ için $a \odot e = e \odot a = a$?

$a \odot e = a \Rightarrow a + e - 2 = a \Rightarrow e = 2$

$a \odot e = a \Rightarrow \frac{ae}{2} = a \Rightarrow e = 2$

$\Rightarrow e = 2$ dır.

• $\forall a \in \mathbb{Z}$ için $\exists a^{-1} \in \mathbb{Z} \ni a \odot a^{-1} = a^{-1} \odot a = e = 2$?

$a \odot a^{-1} = 2$

① a tek a^{-1} tek $\Rightarrow a \odot a^{-1} = 2 \Rightarrow a^{-1} = 4 - a$

② a çift a^{-1} çift $\Rightarrow a \odot a^{-1} = 2 \Rightarrow a^{-1} = 4 - a$

③ a tek a^{-1} çift $\Rightarrow a \odot a^{-1} = 2 \Rightarrow \frac{a \cdot a^{-1}}{2} = 2 \Rightarrow a^{-1} = \frac{4}{a}$
$\Rightarrow a = \mp 1$

④ a çift a^{-1} tek $\Rightarrow a \odot a^{-1} = 2 \Rightarrow a^{-1} = \frac{4}{a}$
$\Rightarrow a = \mp 4$

5) a) $\left.\begin{array}{l}\alpha \subseteq X\times Y \\ \beta \subseteq X\times Y\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha\cup\beta \subseteq X\times Y$

b) $\sim$, A kümesi üzerinde sıralama bağıntısı olsun.

- $\forall x\in A$ için
  $(x,x)\in\sim \Leftrightarrow (x,x)\in\sim^{-1}$

olduğundan $\sim^{-1}$ yansıyandır.

- $\forall x,y\in A$ için
  $(x,y)\in\sim^{-1}$ ve $(y,x)\in\sim^{-1} \Rightarrow x=y$?

$\left.\begin{array}{l}(x,y)\in\sim^{-1} \Rightarrow (y,x)\in\sim \\ (y,x)\in\sim^{-1} \Rightarrow (x,y)\in\sim\end{array}\right\} \xRightarrow[\sim \text{ ters simetrik}]{} x=y$ $\therefore$ $\sim^{-1}$ ters simetriktir.

- $\forall x,y,z\in A$ için
  $(x,y)\in\sim^{-1}$ ve $(y,z)\in\sim^{-1} \Rightarrow (x,z)\in\sim^{-1}$?

$\left.\begin{array}{l}(x,y)\in\sim^{-1} \Rightarrow (y,x)\in\sim \\ (y,z)\in\sim^{-1} \Rightarrow (z,y)\in\sim\end{array}\right\} \xRightarrow[\sim \text{ geçişken}]{} (z,x)\in\sim$

$\Rightarrow (x,z)\in\sim^{-1}$

$\therefore$ $\sim^{-1}$ geçişkendir.

$\therefore$ $\sim^{-1}$, A kümesi üzerinde bir sıralama bağıntısıdır.