1	2	3	4	Toplam

Adı Soyadı:
Numarası:

18.07.2024

2023-2024 SOYUT MATEMATİK II BÜTÜNLEME SINAV SORULARI

1) (20p) Tam sayı ve Tam sayılar kümesini üzerindeki bağıntıyı da yazarak tanımlayınız. $x = [8,2]$ sayısı veriliyor. Buna göre $x^2 + 3x + 5$ sayısını hesaplayınız.

2) (15p)a Rasyonel sayılarda toplama işleminin iyi tanımlı olduğunu gösteriniz.

3) (20p) a) $(\frac{7}{8})^*$ kümesinin bir kesim olduğunu gösteriniz ve bu kümenin supremumunu bulunuz.

(10p) b) r^* ve s^* iki rasyonel kesim olmak üzere $r^* < s^*$ ise $r < s$ olduğunu gösteriniz.

4) (15p) a) $A = \{5,7,11,17,25,35,\dots\}$ kümesinin sayılabilir olup olmadığını sayılabilirlik tanımını kullanarak gösteriniz.

(20p) b) Boştan farklı A, B, C, D kümeleri veriliyor. $A \approx B$ ve $C \approx D$ ise $A \times B \approx C \times D$ olduğunu gösteriniz.

Başarılar
Dr. Çağla Çelemoğlu

Cevap Anahtarı

1) $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ üzerinde bir τ bağıntısı

$(a,b)\,\tau\,(c,d) \iff a+d=b+c$ ile tanımlansın.

Bu bağıntı bir denklik bağıntısıdır.

$[a,b] = \overline{(a,b)} = \{(x,y) \mid (x,y)\,\tau\,(a,b)\}$

(4p) $= \{(x,y) \mid x+b=y+a\}$ denklik

sınıfına tam sayı ve

(4p) $\mathbb{N}\times\mathbb{N}/\tau = \{\overline{(a,b)} \mid (a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\}$ bölüm kümesine

Tam sayılar kümesi denir.

(12p) $x=[8,2] \Rightarrow x^2 = [8,2]\odot[8,2] = [64+4,16+16]$

$= [68,32]$

$3x = [3,0]\odot[8,2] = [24,6]$

$5 = [5,0]$

$x^2+3x+5 = [68,32]+[24,6]+[5,0] = [97,38]$

2) $\oplus : \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$

$([(a,b)],[(c,d)]) \longrightarrow [(a,b)]\oplus[(c,d)] = [(ad+bc,bd)]$

ile tanımlansın. İyi tanımlılık için

$([(a,b)],[(c,d)]) = ([(a',b')],[(c',d')])$ olsun.

$[(a,b)]=[(a',b')] \wedge [(c,d)]=[(c',d')]$ 5p

$\Rightarrow ab'=ba' \wedge cd'=dc'$

1. eşitliğin her iki tarafını dd' ve ikinci eşitliğin her iki tarafını bb' ile çarpalım.

$\Rightarrow ab'dd' = ba'dd'$

$+\ cd'bb' = dc'bb'$

$(ad+bc)b'd' = bd(a'd'+b'c')$ bulunur. İlgili denklik

bağıntısına göre

$\Rightarrow (ad+bc, bd) \; R \; (a'd'+b'c', b'd')$

$\Rightarrow [(ad+bc, bd)] = [(a'd'+b'c', b'd')]$

$\Rightarrow [(a,b)] \oplus [(c,d)] = [(a',b')] \oplus [(c',d')]$ (10p)

3) a) $\left(\frac{7}{8}\right)^* = \left\{ r \in \mathbb{Q} \mid r < \frac{7}{8} \right\}$ (3p)

K1) $\left(\frac{7}{8}\right)^* \neq \emptyset$: $\frac{1}{2} \in \left(\frac{7}{8}\right)^*$ olup $\left(\frac{7}{8}\right)^* \neq \emptyset$

$\left(\frac{7}{8}\right)^* \neq \mathbb{Q}$: $\frac{7}{8} \notin \left(\frac{7}{8}\right)^*$ fakat $\frac{7}{8} \in \mathbb{Q}$ olup

istenen gerçeklenir (5p)

K2) $r \in \left(\frac{7}{8}\right)^*$ ve $q < r$ olsun. q 'nun da $\left(\frac{7}{8}\right)^*$'ın

elemanı old. gösterelim.

$r \in \left(\frac{7}{8}\right)^* \Rightarrow r < \frac{7}{8} \wedge q < r$ (5p)

$(\mathbb{Q}, \leq)$ KSK, geçişme öz

$\Rightarrow q < \frac{7}{8} \Rightarrow q \in \left(\frac{7}{8}\right)^*$

K3) EBE $\left(\frac{7}{8}\right)^*$ olmadığını gösterelim. Aksini kabul edelim

EBE $\left(\frac{7}{8}\right)^*$ var olsun ve x olsun. $x \in \left(\frac{7}{8}\right)^*$ olup

$x < \frac{7}{8} \Rightarrow 2x < \frac{7}{8} + x \Rightarrow x < \frac{\frac{7}{8}+x}{2}$ (7p)

$x < \frac{7}{8} \Rightarrow x + \frac{7}{8} < \frac{14}{8} \Rightarrow \frac{x+\frac{7}{8}}{2} < \frac{7}{8}$

Yani x den daha büyük olan $\frac{\frac{7}{8}+x}{2}$ elemanı da

$\left(\frac{7}{8}\right)^*$ kümesinin elemanıdır. Bu da EBE$\left(\frac{7}{8}\right)^* = x$ olması ile çelişir.

EBE$\left(\frac{7}{8}\right)^*$ yoktur K3 sağlanır. Bu küme kesimdir. $Sup\left(\frac{7}{8}\right)^* = \frac{7}{8}$

3 b) $r^* < s^* \Rightarrow r^* \subset s^*$ olup $r^* \neq s^*$ dır.

$r < s$ olduğunu gösterelim.

$$r^* < s^* \Rightarrow \exists p \in s^* \wedge p \notin r^*$$
$$\Rightarrow p < s \wedge r \leq p$$
$(\mathbb{Q}, \leq)$ KSK pecısme of.
$$\Rightarrow r < s \text{ bulunur}$$

10p

4 a) $A = \{5, 7, 11, 17, 25, 35, \ldots\}$
$= \{n^2+n+5,\ n \in \mathbb{N}\}$ ile yazılır

Bu küme sayılabilir olur mu? Yani

$$\left.\begin{array}{l} f: \mathbb{N} \longrightarrow A \\ n \longrightarrow f(n) = n^2+n+5 \end{array}\right\} \text{ile tanımlayalım}$$

(3p)

f kapalıdır: $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f(n) = n^2+n+5 \in A$ old. açıktır

f iyi tanımlıdır: $n_1 = n_2$ o.s $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ için
$$\Rightarrow n_1^2+n_1+5 = n_2^2+n_2+5$$
$\Rightarrow f(n_1) = f(n_2)$ olup iyi tanımlılık sağlanır

f bir fonksiyondur

5p

f birebirdir: $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ için $f(n_1) = f(n_2)$ olsun
$$\Rightarrow n_1^2+n_1+5 = n_2^2+n_2+5$$
$$\Rightarrow n_1^2+n_1 = n_2^2+n_2$$
$$\Rightarrow n_1^2-n_2^2 = n_2-n_1$$
$$\Rightarrow (n_1-n_2)(n_1+n_2) = (n_2-n_1)$$
$\Rightarrow$ Yani $n_1 = n_2$, ya da $n_1+n_2 = -1$

$n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ old. $n_1+n_2 = -1$ olamaz.

$\Rightarrow n_1 = n_2$ bulunur. Yani f birebirdir

4p

Scanned with CamScanner

f örtendir. $\forall x \in A$ için A'nın tanımından $x = n^2 + n + 5$ o.ş. $n \in \mathbb{N}$ vardır. Örtenlik sağlanır.

3p $A \approx \mathbb{N} \Rightarrow A$ sayılabilir sonsuzdur, yani sayılabilirdir.

4) b) $A \approx B \Rightarrow \exists f : A \to B$ birebir ve örten

$C \approx D \Rightarrow \exists g : C \to D$ birebir ve örten

$\forall (x,y) \in A \times C$ için $(f \times g)(x,y) = (f(x), g(y))$ ile tanımladığımız $f \times g : A \times C \to B \times D$ dönüşümünün birebir ve örten bir fonksiyon old. gösterelim.

$f \times g$ kapalıdır: f ve g fonksiyon old f ve g nin kapalılığından $f \times g$'nin kapalılığı elde edilir.

$f \times g$ iyi tanımlıdır, $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A \times C$ için

10p $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ olsun. $x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$ dir.

f ve g'nin iyi tanımlılığı $\Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \wedge g(y_1) = g(y_2)$

$\Rightarrow (f(x_1), g(y_1)) = (f(x_2), g(y_2))$

$\Rightarrow (f \times g)(x_1, y_1) = (f \times g)(x_2, y_2)$

5p $f \times g$ birebirdir, $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A \times C$ için

$(f \times g)(x_1, y_1) = (f \times g)(x_2, y_2)$

$\Rightarrow (f(x_1), g(y_1)) = (f(x_2), g(y_2))$

$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \wedge g(y_1) = g(y_2)$

f ve g nin birebirliği $\Rightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2 \Rightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$

5p $f \times g$ örtendir: $\forall (z,t) \in B \times D$ alalım. $z \in B \wedge t \in D$ olup f ve g nin örtenliğinden $f(x) = z \wedge g(y) = t$ o.ş. $\exists x \in A$ ve $\exists y \in C$ vardır. O halde

$(z,t) = (f(x), g(y)) = f(x,y)$ o.ş. $\exists (x,y) \in A \times C$

var olup $f \times g$ örtendir.

$A \times C \approx B \times D$ bulunur.