2023-2024 GÜZ DÖNEMİ OMÜ-FEN FAKÜLTESİ

MATEMATİK BÖLÜMÜ TOPOLOJİYE GİRİŞ **FİNAL SINAVI**

23 Ocak 2024 Saat: 11:00

S1) Boş bırakılmış yerleri uygun ifadelerle doldurunuz.

a) (5 puan) Eğer $p \in U \subset V$ olacak şekilde (X,d) metrik uzayında açık bir U kümesi varsa V kümesine p noktasının bir KOMŞULUĞU denir.

b) (5 puan) Metrik uzaylarda süreklilik ve DİZİSEL SÜREKLİLİK kavramları denktir.

c) (5 puan) Eğer d metriğine göre açık olan bir küme ρ metriğine göre de açık ve ρ metriğine göre açık olan bir küme d metriğine göre de açık ise d ve ρ metriklerine DENK METRİKLER denir.

d) (5 puan) (X,d) metrik uzayındaki her bir Cauchy dizisi yakınsaksa X metrik uzayına TAM METRİK UZAY denir.

S2) $X = \{a, b, c, d\}$ olmak üzere

a) $\tau_1 = \{X, \varnothing, \{a\}, \{b,c\}, \{a,c\}\}$

Çözüm: τ_1 bir topolojik yapı DEĞİLDİR. Çünkü $\{a,c\} \cap \{b,c\} = \{c\} \notin \tau$ olup (t3) koşulu sağlanmaz.

b) $\tau_2 = \{X, \varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{c,d\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,d\}\}$

Çözüm: τ_2 bir topolojik yapı DEĞİLDİR. Çünkü

$\{a,b\} \cup \{b,c\} = \{a,b,c\} \notin \tau$

$\{a,b\} \cup \{a,c\} = \{a,b,c\} \notin \tau$

$\{a,b\} \cup \{a,d\} = \{a,b,d\} \notin \tau$

olup (t2) koşulu sağlanmaz.

c) $\tau_3 = \{X, \varnothing, \{a,b\}, \{b,d\}, \{a,b,d\}\}$

Çözüm: τ_3 bir topolojik yapı DEĞİLDİR. Çünkü $\{a,b\} \cap \{b,d\} = \{b\} \notin \tau$ olup (t3) koşulu sağlanmaz.

d) $\tau_4 = \{X, \varnothing, \{a\}\}$

Çözüm: τ_4 bir topolojik yapıdır. Üç koşulun da sağlandığı açıktır.

yapıları topolojik yapı mıdır? Gerekli açıklamaları yaparak gösteriniz (20 puan).

S3) $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi ve $\tau = \{\varnothing, N_n : N_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}, n \in \mathbb{N}\}$ ailesi $\mathbb{N}$ üzerinde bir topoloji olsun.

a) $5 \in \mathbb{N}$ sayısını içeren tüm açıkları bulunuz (10 puan).

b) $A = \{1, 21, 28\}$ kümesinin yığılma noktalarını bulunuz (10 puan).

c) τ ya göre $\mathbb{N}$ nin kapalı kümelerini bulunuz (10 puan).

d) $B = \{2, 5, 8, 9, 11\}$ kümesinin kapanışını bulunuz (10 puan).

Çözüm:

a)

$5 \in N_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\} \in \tau$

$5 \in N_2 = \{2, 3, 4, 5, \ldots\} \in \tau$

$5 \in N_3 = \{3, 4, 5, 6, \ldots\} \in \tau$

$5 \in N_4 = \{4, 5, 6, \ldots\} \in \tau$

$5 \in N_5 = \{5, 6, 7, \ldots\} \in \tau.$

b) $x \in A' \Leftrightarrow \forall x \in U \subset \tau$ için $[U - \{x\}] \cap A \neq \varnothing$

$n_0 \leq 27$ olsun. $[N_{n_0} \setminus \{n_0\}] \cap A \neq \varnothing$ olur Dolayısıyla $\{1, 2, 3, \ldots, 27\} \in A'$ elde edilir.

$n_0 = 28$ olsun. $[N_{28} \setminus \{28\}] \cap A = \{29, 30, 31, \ldots\} \cap \{1, 21, 28\} = \varnothing$ olup $28 \notin A'$ bulunur.

$n_0 > 28$ olsun. $[N_{n_0} \setminus \{n_0\}] \cap A = \varnothing$ olup 28 ve 28 den büyük hiçbir sayı yığılma noktası değildir. O halde;

$$A' = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 25, 26, 27\}$$

kümesidir.

c) $\kappa = \{\mathbb{N}, \varnothing, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}, \ldots\}$

d) $\overline{B} = \{\text{B kümesini içeren kapalı kümelerin arakesiti}\}$

$\overline{B} = \mathbb{N} \cap \{1, 2, 3, \ldots, 11\} \cap \{1, 2, 3, \ldots, 11, 12\} \cap \{1, 2, 3, \ldots, 11, 12, 13\} \cap \ldots$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$

S3) $X=\{a,b,c,d\}$ ve $\tau=\{X,\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,b,c\}\}$ olmak üzere $N(b)$ ve $N(d)$ komşuluk ailelerini bulunuz (10 puan).

Çözüm:

$N(b)=\{X,\{b\},\{a,b\},\{a,b,c\},\{b,c\},\{b,d\},\{a,b,d\},\{b,c,d\}\}$

$N(d)=\{X\}$

S4) $X=\{a,b,c,d\}$ bir küme ve $fl=\{\{a,b\},\{c,d\}\}$ ailesi verilmiş olsun. fl alt bazının X üzerinde ürettiği topolojiyi bulunuz (10 puan).

Çözüm: fl alt bazının elemanlarının birleşimi X kümesini verdiğinden bir topoloji üretir. Önce fl nin elemanlarının sonlu arakesitini alarak β bazını elde edelim.

$$\{a,b\}\cap\{c,d\}=\varnothing$$

fl nin elemanlarıyla birlikte $\beta=\{\varnothing,\{a,b\},\{c,d\}\}$ elde edilir. β nın elemanlarının herhangi birleşimi τ yu verecektir ve τ da β nın elemanları da olacaktır.

$$\{a,b\}\cup\{c,d\}=\{a,b,c,d\}=X$$

Sonuç olarak τ topolojisi,

$$\tau=\{X,\varnothing,\{a,b\},\{c,d\}\}$$

elde edilir.

Dr. Öğr. Üyesi Elif KAPLAN