

S1) (X, d) metrik uzayında yakınsak olan bir $\{x_n\}$ dizisinin limiti tektir, ispatlayınız (20 puan).

S2) $X = \{a, b, c, d\}$ ve

$$\tau_{4n} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$$

olmak üzere (X, τ_{4n}) ikilisinin bir topolojik uzay olduğunu gösteriniz (15 puan). $N(a)$ ve $N(c)$ komşuluklar ailelerini bulunuz (10 puan).

S3) $X = \mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi ve üzerindeki topoloji

$$\tau = \{E_n : E_n = \{n, n+1, n+2, \dots\}\} \cup \{\emptyset\}$$

olsun. $Y = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ olmak üzere (Y, τ_Y) alt uzay topolojisini bulunuz (15 puan).

S4) $X = \{a, b, c, d\}$ olmak üzere $\mathcal{f}l = \{\{a, b\}, \{b, c\}\}$ ailesini alt baz (taban) kabul eden topolojiyi bulunuz (10 puan).

S5) $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $\tau = \{X, \emptyset, \{1\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4, 5\}\}$ olsun.

- $\overline{\{1, 3\}} = ?$ (5 puan)
- $\{2, 4, 5\}^{\circ} = ?$ (5 puan)
- $A = \{2\}$ kümesinin sınırı nedir? (10 puan)
- $B = \{2, 3, 5\}$ kümesinin yığılma noktaları nedir? (10 puan)

Dr. Öğr. Üyesi Elif KAPLAN

CEVAP ANAHTARI

1) X -de bir $\{x_n\}$ dizisi alalım. Kabul edelim ki $x_1 \neq x_2$ olmak

üzere $x_n \rightarrow x_1$ ve $x_n \rightarrow x_2$ olsun. Bu takdirde

$x_n \rightarrow x_1$ ise $\forall \epsilon > 0$ için $\exists n_1$ var $\Rightarrow \forall n_1 > n_0$ için $d(x_n, x_1) < \frac{\epsilon}{2}$

$x_n \rightarrow x_2$ ise $\forall \epsilon > 0$ için $\exists n_2$ var $\Rightarrow \forall n_2 > n_0$ için $d(x_n, x_2) < \frac{\epsilon}{2}$

olur maks $\{n_1, n_2\} = n_0$ alalım. $\forall n > n_0$ için

$$d(x_1, x_2) \leq d(x_1, x_n) + d(x_n, x_2) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

bulunur. Buradan $x_1 = x_2$ old. görülür.

52) t1) $x, \emptyset \in \mathcal{Z}_A$,

t2) $U, V \in \mathcal{Z}_A$ için $U \cap V \in \mathcal{Z}_A$,

t3) $\{U_i\}_{i \in I} \in \mathcal{Z}_A$ için $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{Z}_A$ olmalıdır.

$N(a) = \{ \underbrace{\{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}}_{a\text{-yi iheren daireler}}, \{a,d\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, X \}$

$N(c) = \{ \{a,c\}, \{a,b,c\}, \{a,c,d\}, X \}$

53) $\mathcal{Z}_Y = \{ Y \cap E_n : E_n \in \mathcal{Z} \}$

$Y = \{1, 2, 3, 5, 7\}$

$Y \cap E_1 = Y$

$Y \cap E_3 = \{3, 5, 7\}$

$Y \cap E_5 = \{5, 7\}$

$Y \cap \emptyset = \emptyset$

$Y \cap E_2 = \{2, 3, 5, 7\}$

$Y \cap E_4 = \{5, 7\}$

$Y \cap E_6 = \{7\}$

$\mathcal{Z}_Y = \{ Y, \emptyset, \{7\}, \{5, 7\}, \{3, 5, 7\}, \{2, 3, 5, 7\} \}$

54) $X = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{A} = \{ \{a, b\}, \{b, c\} \}$

$\mathcal{A} \xrightarrow{\cap} \mathcal{B} \xrightarrow{\cup} \mathcal{Z}$

$\mathcal{B} = \{ X, \{a, b\}, \{b, c\}, \{b\} \}$ ($\bigcap_{i \in \emptyset} A_i = X$)

$\mathcal{Z} = \{ X, \emptyset, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\} \}$ ($\bigcup_{i \in \emptyset} A_i = \emptyset$)

55) $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathcal{Z} = \{ X, \emptyset, \{1\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4, 5\} \}$

$\mathcal{K} = \{ \emptyset, X, \{2, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 5\}, \{2, 5\}, \{1\} \}$

i) $\overline{\{1, 3\}} = X$

ii) $\{2, 4, 5\}^\circ = \emptyset$

iii) $A^s = \{2\}^s = \overline{A} \setminus A^\circ = \{2, 5\} \setminus \emptyset = \{2, 5\}$

iv) $A' = \{2, 4, 5\}$