2024-2025 GÜZ DÖNEMİ OMÜ-FEN FAKÜLTESİ MATEMATİK BÖLÜMÜ

TOPOLOJİYE GİRİŞ BÜTÜNLEME SINAVI

Adı- Soyadı: **23 Ocak 2025 Saat: 15:00**

Numarası: **Sınav Süresi: 75 dakika**

S1) (X,d) metrik uzayında yakınsak olan her $\{x_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir, ispatlayınız (20 puan).

$\{x_n\}$, (X,d) metrik uzayında yakınsak bir dizi ve $x_n \to p \in X$ olsun. Verilen $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık, her $n,m \geq n_0$ için

$d(x_n,p) < \frac{\varepsilon}{2}$ ve $d(x_m,p) < \frac{\varepsilon}{2}$

o.ş. bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda üçgen eşitsizliği kullanılarak

$d(x_n,x_m) \leq d(x_n,p) + d(p,x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

elde edilir. $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir.

S2) $\mathbb{R}^2$ üzerindeki alışılmış metriğe göre aşağıdaki kümelerin çapını **tanım yardımıyla** bulunuz (20 puan).

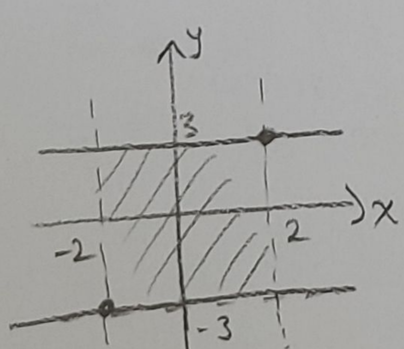
i. $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|<2, |y|\leq 3\}$

ii. $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 2\}$

$\mathbb{R}^2$ üzerinde alışılmış metrik $d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$

Çap tanımı $D(A)=\sup\{d(x,y) : x,y\in A\}$

i)

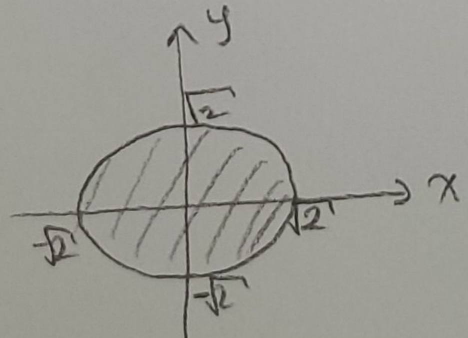


Uzak köşelerden ikisi olan $x=(-2,-3)$ ve $y=(2,3)$ seçilirse

$D(A)=\sqrt{(2-(-2))^2+(3-(-3))^2} = \underline{2\sqrt{13}}$

bulunur.

ii)



$x=(\sqrt{2},0)$ ve $y=(-\sqrt{2},0)$ seçilirse

$D(B)=\sqrt{(\sqrt{2}-(-\sqrt{2}))^2+(0-0)^2} = \underline{2\sqrt{2}}$

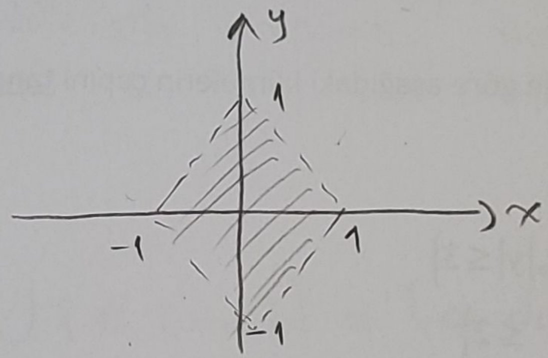
bulunur.

S3) $\mathbb{R}^2$ üzerinde $d:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ fonksiyonu

$$d(x,y)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|$$

şeklinde tanımlı bir metrik olsun. $0-$merkezli ,$1-$ yarıçaplı $B(0,1)$ açık yuvarını **bulup** çiziniz (20 puan).

$$B(0,1)=\{x\in\mathbb{R}^2 : d(x,(0,0))<1\} \qquad (x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2)$$
$$=\{x\in\mathbb{R}^2 : |x_1-0|+|x_2-0|<1\}$$
$$=\{x\in\mathbb{R}^2 : |x_1|+|x_2|<1\}$$
$$=\{x\in\mathbb{R}^2 : x_1+x_2<1,\ x_1-x_2<1,$$
$$-x_1+x_2<1,\ -x_1-x_2<1\}$$



B(0,1) yuvarının şekli

S4) $X=\{a,b,c,d\}$ kümesi üzerinde

$$\tau=\{X,\varnothing,\{c\},\{a,b\},\{b,d\},\{a,b,d\}\}$$

yapısı bir topolojik yapı mıdır? Gerekli açıklamaları yaparak gösteriniz (10 puan).

τ bir topolojik yapı <u>değildir</u> çünkü

$\{a,b\}\cap\{b,d\}=\{b\}\notin\tau$

$\{a,b\}\cup\{c\}=\{a,b,c\}\notin\tau.$

S5) $X=\{a,b,c,d,e\}$ ve $\tau=\{X,\emptyset,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\}\}$ olsun.

i. $A=\{a,c\}$ kümesinin kapanışı $\overline{A}=?$ (5 puan)

ii. $B=\{b,c,d\}$ kümesinin içi $B^{\circ}=?$ (5 puan)

iii. $C=\{c,d\}$ kümesinin sınırı $C^{S}=?$ (5 puan)

iv. $D=\{a,b,c,d\}$ kümesinin yığılma noktalarını bulunuz (10 puan)

v. $N(b)$ komşuluk ailesini bulunuz (5 puan)

Dr. Öğr. Üyesi Elif KAPLAN

Çözüm

i) $\overline{A}=\bigcap_{K\in\mathcal{K}}(A\subset K)$, $\mathcal{K}=\{\emptyset, X, \{b,c,d,e\}, \{a,b,e\}, \{b,e\}, \{a\}\}$

$\overline{A}=X$

ii) $B^{\circ}=\bigcup_{U\in\tau}(U\subset B)=\bigcup\{\emptyset,\{c,d\}\}=\{c,d\}$

iii) $C^{S}=\overline{C}\setminus C^{\circ}$

$\overline{C}=X\cap\{b,c,d,e\}=\{b,c,d,e\}$

$C^{\circ}=\{c,d\}$ (Açık küme old. $C^{\circ}=C$)

$C^{S}=\overline{C}\setminus C^{\circ}=\{b,c,d,e\}\setminus\{c,d\}=\{b,e\}$

iv) $x\in D' \Leftrightarrow \forall U\in\tau$ için $[U-\{x\}]\cap D\neq\emptyset$

$D'=\{b,c,d,e\}$

v) $N(b)=\{X,\{b,c,d,e\}\}$

↳ b-noktasını içeren açık kümeler ve kümelerden oluşur.
bu açık kümeleri kapsayan küme X ve X
$\{b,c,d,e\}$ kümesini kapsayan
kümesi de zaten yazılıdır.