Adı-Soyadı:

Numarası:

16.11.2024

MAT 101 ANALİZ I DERSİ ARASINAV SORULARI

1) Reel sayılar kümesinin alttan sınırlı her alt kümesinin bir infimumu olduğunu gösteriniz. (10 puan)

2) $x \geq 0$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için $(1+x)^{2n} \geq 1+2nx$ eşitsizliğinin sağlandığını tümevarım ile gösteriniz. (10 puan)

3) $\beta_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \operatorname{sgn} x = y\}$ ve $\beta_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \operatorname{sgn} y = x\}$ bağıntıları birer fonksiyon belirtir mi? Açıklayınız. (10 puan)

4) $A = \{x \in \mathbb{R} : [\![3x]\!] = 3[\![x]\!]\} \cap [0,1)$ kümesinin supremum ve infimum değerlerini varsa bulunuz. (15 puan)

5) $\sin\left(\arcsin\frac{12}{13} - \operatorname{arccot}\frac{17}{7}\right)$ değerini hesaplayınız. (15 puan)

6) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x-|x|}}{\log_{2x}(x^2+5)} + \dfrac{\arctan\frac{1}{x}}{e^{\arcsin(x-1)}}$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz. (15 puan)

7) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ [\![\sin x]\!], & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \\ \left(x-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{sgn}\left(x-\frac{\pi}{4}\right), & \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$ fonksiyonunun $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ aralığında grafiğini çiziniz, sabit ve monoton olduğu aralıkları belirleyiniz, terslenebilir olup olmadığını açıklayınız. (15 puan)

8) $(s_n) \subset \mathbb{R}$ monoton azalan bir dizi olsun. Bu durumda (s_n) dizisi alttan sınırlı ise yakınsaktır, ispatlayınız. (10 puan)

Not: Süre 100 dakikadır.

Başarılar…

Doç. Dr. Nilay DEĞİRMEN

CEVAP ANAHTARI

2) $x \geq 0$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için $(1+x)^{2n} \geq 1+2nx$ eşitsizliğinin sağlandığını tümevarım ile gösteriniz.

<u>Çözüm:</u> $n=1$ için $(1+x)^2 = 1+x^2+2x \geq 1+2x$ sağlanıyor.

$n=k$ için eşitsizlik sağlansın, yani

$$\boxed{(1+x)^{2k} \geq 1+2kx} \quad (*)$$

olsun.

$n=k+1$ için eşitsizlik sağlanır mı? Yani

$$(1+x)^{2(k+1)} \geq 1+2(k+1)x$$

mi?

$$\begin{aligned}(1+x)^{2(k+1)} = (1+x)^{2k+2} &= (1+x)^{2k}(1+x)^2 \\ &\overset{(*)}{\geq} (1+2kx)(1+x^2+2x) \\ &= 1+x^2+2x+2kx+2kx^3+4kx^2 \\ &= (1+2kx+2x)+\underbrace{(x^2+2kx^3+4kx^2)}_{\geq 0} \\ &\geq 1+2kx+2x \\ &= 1+2(k+1)x\end{aligned}$$

Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için $(1+x)^{2(k+1)} \geq 1+2(k+1)x$ dir.

1) $X \subset \mathbb{R}$ alttan sınırlı bir küme olsun. A da X in alt sınırlarının kümesi olsun. O halde $\forall x \in X$ ve $\forall a \in A$ için $a \leq x$ dir. Tamlık aksiyomundan $a \leq c \leq x$ olacak şekilde bir c sayısı vardır ve c, A nın bir elemanıdır. Bu durumda $c = \max A = \inf X$ olur.

4) $A = \{x \in \mathbb{R} : [\![3x]\!] = 3[\![x]\!]\} \cap [0,1)$

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $x = [\![x]\!] + r$, $0 \le r < 1$ dir.

$$3x = 3[\![x]\!] + 3r$$

$$[\![3x]\!] = [\![\underbrace{3[\![x]\!]}_{\in \mathbb{Z}} + 3r]\!] = 3[\![x]\!] + [\![3r]\!]$$

1. Durum: $0 \le r < \frac{1}{3}$ olsun. O zaman $0 \le 3r < 1$ olup $[\![3r]\!] = 0$ dır. O halde $x \in [n, n+\frac{1}{3})$, $n \in \mathbb{Z}$ için $3[\![x]\!] = [\![3x]\!]$ eşitliği sağlanır.

2. Durum: $\frac{1}{3} \le r < \frac{2}{3}$ olsun. O zaman $1 \le 3r < 2$ olup $[\![3r]\!] = 1$ dir. Bu durumda $[\![3x]\!] = 3[\![x]\!] + 1$ olur. Dolayısıyla $[\![3x]\!] = 3[\![x]\!]$ eşitliği sağlanmaz.

3. Durum: $\frac{2}{3} \le r < 1$ olsun. O zaman $2 \le 3r < 3$ olup $[\![3r]\!] = 2$ dir. Bu durumda $[\![3x]\!] = 3[\![x]\!] + 2$ olur. Dolayısıyla $[\![3x]\!] = 3[\![x]\!]$ eşitliği sağlanmaz.

$$A = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [n, n+\tfrac{1}{3}) \right) \cap [0,1) = [0, \tfrac{1}{3})$$

$\sup A = \frac{1}{3}$, $\inf A = 0$

3) $\beta_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \operatorname{sgn} x = y\}$ için tanım kümesinde boşta eleman kalmıyor ve tanım kümesindeki her elemanın yalnız bir görüntüsü var. Dolayısıyla β_1 bir fonksiyondur.

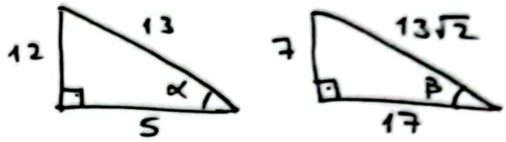
$\beta_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \operatorname{sgn} y = x\}$ için $(1,1)$, $(1,2) \in \beta_2$ dir. Yani 1 elemanının en az iki görüntüsü vardır. Dolayısıyla β_2 bir fonksiyon belirtmez.

5) $\sin\Big(\underbrace{\arcsin\frac{12}{13}}_{\alpha} - \underbrace{\text{arccot}\frac{17}{7}}_{\beta}\Big)$

$\alpha = \arcsin\frac{12}{13} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{12}{13}$, $\arcsin: [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ α, 1. bölgede

$\beta = \text{arccot}\frac{17}{7} \Rightarrow \cot\beta = \frac{17}{7}$, $\text{arccot}: \mathbb{R} \to (0,\pi)$ β, 1. bölgede

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$$



$$= \frac{12}{13}\cdot\frac{17}{13\sqrt{2}} - \frac{7}{13\sqrt{2}}\cdot\frac{5}{13}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

6) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x-|x|}}{\log_{2x}(x^2+5)} + \dfrac{\arctan\frac{1}{x}}{e^{\arcsin(x-1)}}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R}: 2x>0,\ 2x \neq 1,\ x \neq 0,\ x-1 \in [-1,1]\}$

$2x>0 \Rightarrow x>0$

$2x \neq 1 \Rightarrow x \neq \frac{1}{2}$

$x-1 \in [-1,1] \Rightarrow -1 \leq x-1 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$

$x \neq 0$

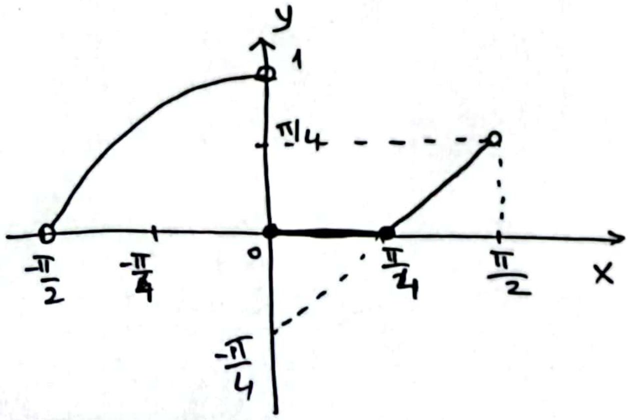
$\Rightarrow D_f = (0,2] - \{\frac{1}{2}\}$

7) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ [|\sin x|], & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \\ (x-\frac{\pi}{4})\,\text{sgn}(x-\frac{\pi}{4}), & \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 \leq \sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} < 1 \Rightarrow [|\sin x|] = 0$

$\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow x - \frac{\pi}{4} > 0 \Rightarrow \text{sgn}(x-\frac{\pi}{4}) = 1$

$\Rightarrow (x-\frac{\pi}{4})\cdot\text{sgn}(x-\frac{\pi}{4}) = x - \frac{\pi}{4}$



f fonksiyonu; $[0,\frac{\pi}{4}]$ aralığında sabit, $(-\frac{\pi}{2},0)$ ve $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ aralıklarında artandır.

$f(\frac{\pi}{6}) = f(\frac{\pi}{8}) = 0$ olduğundan f 1-1 değildir, dolayısıyla terslenebilir de olamaz.

8) Notlarda var.