03.02.2024

Adı-Soyadı:

Numarası:

Analiz I Bütünleme Sınavı Soruları

1) $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ olmak üzere $|x-y|<1$ ve $|z-t|<1$ ise $|xz-yt|<|y|+|t|+1$ olacağını üçgen eşitsizliğini kullanarak gösteriniz. (10 puan)

2) $f: X \to Y, g: Y \to X$ fonksiyonları veriliyor. Eğer $f \circ g$ fonksiyonu birebir ise g fonksiyonunun da birebir olacağını gösteriniz. (10 puan)

3) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sgn} \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x-1}}{\left[\!\left[\dfrac{x}{2} \right]\!\right] + 3} + \arcsin\left|x^2-1\right|$ olmak üzere f fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz. (10 puan)

4) $\dfrac{5}{4} + \arctan x = \operatorname{ch}(\ln 2)$ eşitliğini sağlayan x değerlerini varsa bulunuz. (10 puan)

5) $(a_n) = \left(\sqrt{3}, \sqrt{3\sqrt{3}}, \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}, \ldots, \underbrace{\sqrt{3\sqrt{3\ldots\sqrt{3}}}}_{n \text{ tane } 3}, \ldots \right)$ dizisinin yakınsak olduğunu gösteriniz. (15 puan)

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}\right)$ değerini hesaplayınız. (10 puan)

7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(1-\cos x)}{(\tan x)^3}$ limitini hesaplayınız. (10 puan)

8) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2|x-3|}{(x-3)\operatorname{sgn}(x-3)}$ limitinin varlığını araştırınız. $f(x) = \dfrac{x^2|x-3|}{(x-3)\operatorname{sgn}(x-3)}$ ile tanımlı f fonksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerinde süreksiz olduğu nokta var mıdır? Açıklayınız. (10 puan)

9) $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 + \ln\cos x & x \le 0 \\ \dfrac{e^x}{x^2\cot^2 2x}, & x > 0 \end{cases}$ fonksiyonunun $x=0$ noktasındaki sürekliliğini inceleyiniz. (15 puan)

Not: Süre 90 dakikadır.

Başarılar

Subject: ANALİZ I BÜTÜNLEME CEVAP ANAHTARI Date: ....../....../......

(1) $|xz-yt| = |xz - xt + xt - yt|$

$= |x(z-t) + t(x-y)|$

$\overset{\text{üçgen eşitsizliği}}{\leq} |x(z-t)| + |t(x-y)|$

$= |x| \cdot |z-t| + |t| \cdot |x-y|$

$< |x| \cdot 1 + |t| \cdot 1$

$= |x| + |t|$

$= |x-y+y| + |t|$

$\overset{\text{üçgen eşitsizliği}}{\leq} |x-y| + |y| + |t|$

$< 1 + |y| + |t|$

(2) $f: X \to Y$, $g: Y \to X$

$\forall x, y \in Y$ alalım.

$g(x) = g(y) \Rightarrow f(g(x)) = f(g(y))$

$\Rightarrow (f\circ g)(x) = (f \circ g)(y)$

$\overset{f\circ g \; 1-1}{\Rightarrow} x = y$

olduğundan g 1-1 dir.

(3) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sgn} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x-1}}{[|\frac{x}{2}|]+3} + \arcsin|x^2-1|$

$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} : 1-x^2 \geq 0,\ x-1 \neq 0,\ [|\tfrac{x}{2}|]+3 \neq 0,\ |x^2-1| \in [-1,1] \right\}$

$1-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow x \in [-1,1]$

$x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$

$|x^2-1| \in [-1,1] \Rightarrow 0 \leq |x^2-1| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x^2-1 \leq 1$

$\Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 2$

$\Rightarrow x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

$[|\tfrac{x}{2}|]+3 \neq 0 \Rightarrow [|\tfrac{x}{2}|] \neq -3 \Rightarrow x \in (-\infty,-6) \cup [-4,\infty)$

$\left([|\tfrac{x}{2}|] = -3 \Rightarrow -3 \leq \tfrac{x}{2} < -2 \Rightarrow -6 \leq x < -4 \right)$

$D_f = [-1,1)$

Subject : Date :....../....../......

④ $\frac{5}{4} + \arctan x = ch(\ln 2) \Rightarrow \frac{5}{4} + \arctan x = \frac{e^{\ln 2} + e^{-\ln 2}}{2}$

$\Rightarrow \frac{5}{4} + \arctan x = \frac{2 + \frac{1}{2}}{2}$

$\Rightarrow \frac{5}{4} + \arctan x = \frac{5}{4}$

$\Rightarrow \arctan x = 0 \Rightarrow x = 0$

⑤ $(a_n) = \left(\sqrt{3}, \sqrt{3\sqrt{3}}, \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}, \ldots, \sqrt{3\sqrt{3\ldots\sqrt{3}}}, \ldots\right)$

$a_1 = \sqrt{3}, \quad a_{n+1} = \sqrt{3 . a_n}$

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n \leq 3$ olduğunu gösterelim:

$a_1 = \sqrt{3} \leq 3$

$a_n \leq 3$ olsun.

$a_{n+1} \leq 3$ mü?

$a_{n+1} = \sqrt{3 . a_n} \leq \sqrt{3 . 3} = 3$ olduğundan $a_{n+1} \leq 3$

olup tümevarım prensibinden $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n \leq 3$ olur.

Dolayısıyla (a_n) dizisi üstten sınırlıdır.

Diğer yandan (a_n) dizisi monoton artandır:

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{3 a_n}}{a_n} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a_n}} \overset{a_n \leq 3}{\geq} \frac{\sqrt{a_n}}{\sqrt{a_n}} = 1$

olduğundan $a_{n+1} \geq a_n$ dir, yani (a_n) monoton artandır.

(a_n) dizisi üstten sınırlı ve artan olduğundan

Monoton Yakınsaklık teoremi gereği yakınsaktır.

⑥ $\lim_{n \to \infty} \left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}\right) \overset{\infty - \infty}{=} \lim_{n \to \infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}\right)\left(\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+1}\right)}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+1}}$

$= \lim_{n \to \infty} \frac{n^2+n-n^2-1}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+1}} = \lim_{n \to \infty} \frac{n-1}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+1}}$

$\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{n \to \infty} \frac{n\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}} + n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1 - \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}}{\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}} + \sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0}}} = \frac{1}{2}$

Subject :   Date :....../....../......

(7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(1-\cos x)}{(\tan x)^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\left(1-\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)\right).(\cos x)^3}{(\sin x)^3}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x.\ 2.\ \sin\frac{x}{2}\ \sin\frac{x}{2}\ (\cos x)^3}{\sin x\ \sin x\ \sin x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} 2.\ \dfrac{x}{\sin x}\ \dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\sin x}\ \dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\sin x}.\ (\cos x)^3$

$= 2.1.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.1 = \frac{1}{2}$

(8) $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^2|x-3|}{(x-3)\operatorname{sgn}(x-3)} = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^2\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}.1} = 9$

$\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x^2.|x-3|}{(x-3)\operatorname{sgn}(x-3)} = \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x^2.(-\cancel{(x-3)})}{\cancel{(x-3)}.(-1)} = 9$

Sağ ve sol limit birbirine esit ve 9 olduğundan

$\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2|x-3|}{(x-3)\operatorname{sgn}(x-3)}$ limiti vardır ve 9 dur.

$f(x) = \dfrac{x^2|x-3|}{(x-3)\operatorname{sgn}(x-3)}$ fonksiyonunun $x=3$ noktasında limiti vardır, ancak tanımlı değildir. Dolayısıyla f fonksiyonu $x=3$ noktasında sürekli değildir. $x=3$ noktası dışında başka kritik noktası olmadığı için f fonksiyonu $\mathbb{R}-\{3\}$ de süreklidir.

(9) $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 + \ln\cos x & , x \le 0 \\ \dfrac{e^x}{x^2.\cot^2 2x} & , x > 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (x+2)^2 + \ln(\cos x) = 4$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^x}{x^2\cot^2 2x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^x}{x^2}.\tan^2 2x$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} e^x.\ \dfrac{\tan 2x}{x}.\ \dfrac{\tan 2x}{x}$

$= 1.2.2 = 4$

$f(0) = 4$

olup $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$ dır. Dolayısıyla f, $x=0$ da süreklidir.