Adı-Soyadı: **Numarası:**

26.01.2025

MAT 101 ANALİZ I DERSİ BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI

1) $\beta=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} : x=\operatorname{sgn}|y|\}$ bağıntısının grafiğini çiziniz. Bu bağıntı bir fonksiyon belirtir mi? Açıklayınız. (10 puan)

2) $\log_3\left(3^{x^2-13x+28}+\dfrac{2}{9}\right)=\log_5(0,2)$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz. (15 puan)

3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\tanh x$ fonksiyonunun tek veya çift fonksiyon olup olmadığını gösteriniz. (10 puan)

4) $a_1=1,\ a_{n+1}=\sqrt{2a_n},\ n\geq 1$ ile tanımlı (a_n) dizisi veriliyor.

a) (a_n) dizisinin 2 ile üstten sınırlı olduğunu gösteriniz. (5 puan)

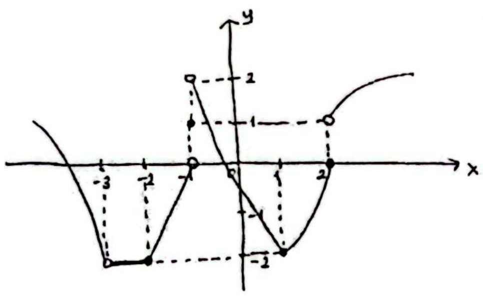
b) (a_n) dizisinin artan olduğunu gösteriniz. (5 puan)

c) (a_n) dizisi yakınsak mıdır? Yakınsak ise limitini bulunuz. (5 puan)

5) İki ıraksak dizinin çarpımı ıraksak olmak zorunda mıdır? Evet ise ispatlayınız, hayır ise örnek veriniz. (10 puan)

6) Stolz teoremini kullanarak $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$ limitini hesaplayınız. (10 puan)

7)



Yanda grafiği verilen f fonksiyonu için $\lim\limits_{x\to-3}f(x)+\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)+\lim\limits_{x\to2^-}f(x)$ toplamını hesaplayınız. (15 puan)

8) $f:[-1,2]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}3^{\frac{1}{x-1}}+2^{x-1}, & -1\leq x<1\\ 1, & x=1\\ \dfrac{|x-1|}{x-1}, & 1<x\leq 2\end{cases}$ ile tanımlı f fonksiyonunun $[-1,2]$ kapalı aralığındaki sürekliliğini ve düzgün sürekliliğini inceleyiniz. (15 puan)

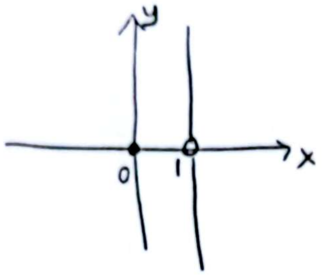
Not: Süre 90 dakikadır.

Başarılar...

Doç. Dr. Nilay DEĞİRMEN

1) $\beta = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x = \operatorname{sgn}|y|\}$

$$x = \operatorname{sgn}|y| = \begin{cases} 1, & |y| > 0 \\ 0, & |y| = 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & y \in \mathbb{R} - \{0\} \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$



$(1,1), (1,2) \in \beta$ olduğundan

β bir fonksiyon belirtmez.

2) $\log_3\left(3^{x^2-13x+28} + \frac{2}{9}\right) = \log_5 (0,2) = \log_5 \frac{1}{5} = \log_5 5^{-1} = -1$

$\Rightarrow 3^{x^2-13x+28} + \frac{2}{9} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow 3^{x^2-13x+28} = 3^{-2} \Rightarrow x^2 - 13x + 28 = -2$

$\Rightarrow x^2 - 13x + 30 = 0$

$\Rightarrow (x-3)(x-10) = 0$

$\Rightarrow x = 3$ veya $x = 10$

G.K. $= \{3, 10\}$

3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \tanh x$

$$f(-x) = \tanh(-x) = \frac{sh(-x)}{ch(-x)} = \frac{-shx}{chx} = -\tanh x = -f(x)$$

olduğundan f tek fonksiyondur.

4) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$

a) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n \leq 2$ dir:

$n=1$ için $a_1 = 1 \leq 2$ dir.

$n=k$ için doğru olsun, yani $a_k \leq 2$ olsun.

$n=k+1$ için doğru mu? Yani $a_{k+1} \leq 2$ mi?

$a_{k+1} = \sqrt{2a_k} \leq \sqrt{2.2} = 2$ olduğundan tümevarım

prensibi gereği istenen elde edilir.

b) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{2a_n}}{a_n} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a_n}} \geq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$ olduğundan (a_n) artandır.

c) (a_n) üstten sınırlı ve artan olduğundan Monoton yakınsaklık teoremi gereği (a_n) yakınsaktır.

$\lim_{n\to\infty} a_n = L$ olsun.

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2a_n}$$

$$\Rightarrow L = \sqrt{2L} \Rightarrow L^2 = 2L$$

$$\Rightarrow L(L-2) = 0$$

$$\Rightarrow \cancel{L=0} \text{ veya } \boxed{L=2}$$

$((a_n)$ artan$)$

5) $(a_n) = ((-1)^n)$, $(b_n) = ((-1)^n)$ ıraksak iki dizi

$(a_n . b_n) = (1) = (1, 1, 1, \dots, 1, \dots)$ yakınsak

6) $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$

$y_n = \sqrt{n}$

(y_n) artan ve $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$

Stolz teoremi uygulanabilir.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\cancel{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) - \left(\cancel{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}}\right)}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\cancel{n}+1-\cancel{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 1 + \sqrt{\frac{n}{n+1}} = 2$$

olduğundan $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 2$ dir.

7) $\lim_{x\to -3} f(x) + \lim_{x\to -1^+} f(x) + \lim_{x\to 2^-} f(x) = (-2) + 2 + 0 = 0$

8) $x = 1$ kritik nokta

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 3^{\frac{1}{x-1}} + 2^{x-1} = 0 + 1 = 1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{x-1}} = 1$$

$f(1) = 1$

$\Rightarrow f$, $x=1$ de sürekli

f, $[-1,2]$ aralığında sürekli ve dolayısıyla düzgün süreklidir.