

Cebir I Final Cevap Anahtarı

1- a) $(a, p^2) = p \Rightarrow p|a \wedge p|p^2$ fakat $p^2 \nmid a$ dir.

$(a+p, p^2) = t$ olsun.

$p|a+p \wedge p|p^2 \Rightarrow p|t$ ① $t|a+p \wedge t|p^2 \Rightarrow t|p$

$\Rightarrow t|a+p \Rightarrow t|a$ olup $t|p$ bulunur. ②

b) $o(a) = n$ ve $o(bab^{-1}) = t$ olsun.

$(bab^{-1})^t = e \Rightarrow (bab^{-1})(bab^{-1}) \dots (bab^{-1}) = e$
 $\Rightarrow ba^t b^{-1} = e \Rightarrow a^t = e$ olup $n|t$ ①

$o(a) = n \Rightarrow a^n = e \Rightarrow ba^n b^{-1} = e$

$\Rightarrow ba \dots a b^{-1} = e \Rightarrow bab^{-1} \dots bab^{-1} = e$ olup $t|n$ ②

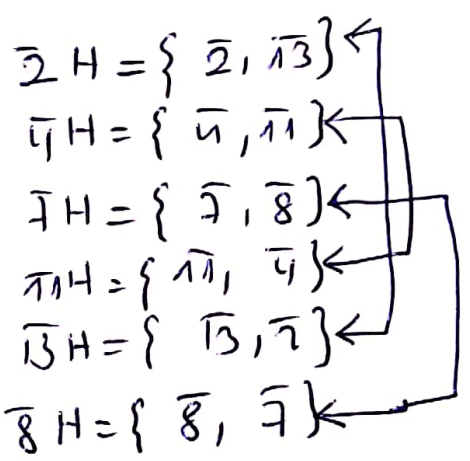
$t = n$ bulunur.

2- $\mathbb{Z}_{15}^* = \{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}$ $H = \{1, 14\}$

.	1	14
1	1	14
14	14	1

olup $H \leq \mathbb{Z}_{15}^*$ olur. \mathbb{Z}_{15}^* deg. olduğunda

$H \triangleleft \mathbb{Z}_{15}^*$ bulunur.



$2H = 13H$
 $4H = 8H$

$\mathbb{Z}_{15}^* / H = \{H, 2H, 4H, 7H\}$

3- Defterinizde var.

4-) $Z_{12}^* = \{1, 5, 7, 11\}$

$f_7 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 11 \\ 1 & 5 & 7 & 11 \end{pmatrix}$ ~~$f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 11 \\ 5 & 7 & 11 & 1 \end{pmatrix}$~~

$f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 11 \\ 5 & 1 & 11 & 7 \end{pmatrix}$ $f_7 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 11 \\ 7 & 11 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ $f_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 11 \\ 11 & 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

$\varphi(Z_{12}^*) = \{\varphi(1), \varphi(5), \varphi(7), \varphi(11)\}$

	$\varphi(1)$	$\varphi(5)$	$\varphi(7)$	$\varphi(11)$
$\varphi(1)$	$\varphi(1)$	$\varphi(5)$	$\varphi(7)$	$\varphi(11)$
$\varphi(5)$	$\varphi(5)$	$\varphi(1)$	$\varphi(11)$	$\varphi(7)$
$\varphi(7)$	$\varphi(7)$	$\varphi(11)$	$\varphi(1)$	$\varphi(5)$
$\varphi(11)$	$\varphi(11)$	$\varphi(7)$	$\varphi(5)$	$\varphi(1)$

5) $a \in G$ için $\varphi_a: G \rightarrow G$
 $n \rightarrow \varphi_a(n) = an\bar{a}$ iç otomorfizma

olduğundan $I(G) \neq \emptyset$

$\forall a, b \in G, \varphi_a, \varphi_b \in I(G)$ için $\varphi_a \circ \varphi_b \in I(G)$ ve $\varphi_a^{-1} \in I(G)$ olduğunu göstermeliyiz.

$\forall n \in G$ için $(\varphi_a \circ \varphi_b)(n) = \varphi_a(\varphi_b(n)) = a(bn\bar{b})\bar{a}$
 $= abn(ab)^{-1}$
 $= \varphi_{ab}(n)$

$\varphi_a \circ \varphi_b = \varphi_{ab} \in I(G)$ bulunur.

$\varphi_a \circ \varphi_{\bar{a}} = \varphi_{a\bar{a}} = \varphi_e$ ve $\varphi_{\bar{a}} \circ \varphi_a = \varphi_e$ dir.

$\forall n \in G$ için $\varphi_e(n) = n = \mathbb{1}_G(n)$ olup $\varphi_e, O(G)$ 'nin birim elemanıdır. Buradan $\varphi_{\bar{a}} = \varphi_a^{-1}$ elde edilir.

o halde $I(G) \leq O(G)$ bulunur.