Adı Soyadı:
Numarası:

03.01.2025

MAT 205 DİFERANSİYEL DENKLEMLER I FİNAL SINAVI SORULARI

1.(10p) $dy+\left(5y-\dfrac{8}{y^4}\right)dx=0$ denklemi için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

$\dfrac{dy}{dx}=-5y+\dfrac{8}{y^4}$

a) Bernoulli denklemidir b) Tam diferansiyel denklemdir c) Riccati denklemidir

d) Sıfırıncı dereceden homojen denklemdir e) Lineer denklemdir

$y'+5y=8y^{-4}$ $P(x)$ $Q(x)$ $n=-4$

2. (10p) Aşağıdakilerden hangisi $\underbrace{xdy}_{N}-\underbrace{(5x+3y)dx}_{M}=0$ denklemi için bir integral çarpanıdır?

$M_y=-3$ $N_x=1$ $\dfrac{M_y-N_x}{N}=\dfrac{-3-1}{x}=-\dfrac{4}{x}$

a) $4x$ b) x^{-1} c) e^{x} d) x^{-4} e) $-4x^{-1}$

$\lambda(x)=e^{\int-\frac{4}{x}dx}=e^{-4\ln x}=x^{-4}$

3. (10p) Aşağıdakilerden hangisi değişkenlerine ayrılabilen denklem değildir?

a) $\sqrt{y}dx+\dfrac{x}{2\sqrt{y}}dy=0$ b) $x^2ydx+(1-y)dy=0$ c) $(y-2x)dx-3xdy=0$

d) $ydx-2xdy=0$ e) $\dfrac{3}{x}dx+\dfrac{2x+3}{y^2}dy=0$

Cevap Anahtarı

4. (10p) Aşağıdakilerden hangisi Lagrange denklemi değildir? $y=xg(p)+f(p)$ olmalı $p=y'$

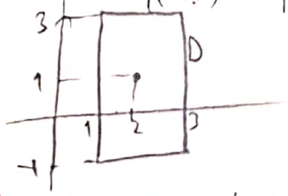
a) $y-(y')^2=xy' \to y=xp+p^2$ b) $y-(y')^3(x+y')=0$ c) $x(y'-3\ln y')=y'-y$

$y=xp^3+p^4$ $y=-x(p-3\ln p)+p$

d) $xy-y'+x^2(y')^2=0$ e) $y-\ln y'-x(y')^2=0$

$y=-xp^2+p/x$ $y=xp+\ln p$

5. (8+8=16p) $y'=\dfrac{2y-1}{x}$, $y(2)=1$ başlangıç değer problemi ve $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x-2|\le 1, |y-1|\le 2\}$ bölgesi verilsin.



a) D bölgesinde problemin varlık-tekliğini inceleyiniz.

$f(x,y)=\dfrac{2y-1}{x}$, $x\neq 0$ hariç sürekli yani D de sürekli olduğundan çözüm vardır.

$\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{2}{x}$, $x\neq 0$ hariç sürekli yani D de sürekli olduğundan varlık-teklik teoremine göre çözüm var ve tektir.

b) Varsa çözümü bulunuz.

$y'=\dfrac{2}{x}y-\dfrac{1}{x} \to y'-\dfrac{2}{x}y=-\dfrac{1}{x}$ lineer denklemdir.

$\lambda(x)=e^{\int-\frac{2}{x}dx}=e^{-2\ln x}=x^{-2}=\dfrac{1}{x^2}$ için

$\dfrac{1}{x^2}y=\int-\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{x^2}dx+c$

$\dfrac{y}{x^2}=\dfrac{1}{2x^2}+c \to y=\dfrac{1}{2}+cx^2$ genel çözüm

$y(2)=1 \to 1=\dfrac{1}{2}+c.4 \to c=\dfrac{1}{8} \to y=\dfrac{1}{2}+\dfrac{x^2}{8}$ istenen özel çözüm

6. (8+8+8=24p) $yy'-(y')^2(x-1)=1$ denklemi verilsin.

a) Genel çözümünü bulunuz.

$y'=p \rightarrow yp-p^2(x-1)=1 \rightarrow y=p(x-1)+\frac{1}{p} \rightarrow y=xp\underbrace{-p+\frac{1}{p}}_{f(p)}$

Clairaut denklemi

$p=c$ için $y=xc-c+\frac{1}{c}$ genel çözüm

b) Varsa tekil çözümünü bulunuz.

$x=-f'(p)$
$y=p(-f'(p))+f(p)$

$f(p)=-p+\frac{1}{p} \rightarrow f'(p)=-1-\frac{1}{p^2}$

$x=1+\frac{1}{p^2} \rightarrow x-1=\frac{1}{p^2}$

$y=p(1+\frac{1}{p^2})-p+\frac{1}{p} \rightarrow y=\frac{2}{p} \rightarrow p=\frac{2}{y}$

$p=\frac{2}{y} \rightarrow p^2=\frac{4}{y^2} \rightarrow \underbrace{x-1=\frac{y^2}{4}}$ p-tekil yeri

$f''(p)=\frac{2}{p^3}\neq 0$ olduğundan $x-1=\frac{y^2}{4}$ tekil çözümdür.

c) Varsa zarfını bulunuz.

$x-1=\frac{y^2}{4}$ genel çözümde yazılırsa

$y=xc-c+\frac{1}{c} \rightarrow y=c(x-1)+\frac{1}{c} \rightarrow y=c\cdot\frac{y^2}{4}+\frac{1}{c}$

$\rightarrow c^2y^2+4-4cy=0$

$\rightarrow (cy-2)^2=0 \rightarrow c=\frac{2}{y}$ çift katlı kök o halde $x-1=\frac{y^2}{4}$ zarftır

7. (20p) $(y')^2-(2y-3x^2)y'-6x^2y=0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$y'=p \quad p^2-(2y-3x^2)p-6x^2y=0$

$3x^2 \quad -2y$

$(p+3x^2)(p-2y)=0$

- $y'+3x^2=0 \rightarrow \int dy=\int -3x^2\,dx$ DA $\rightarrow y=-x^3+c$
- $y'-2y=0 \rightarrow \int\frac{dy}{y}=\int 2\,dx$ DA $\rightarrow \ln y=2x+c^* \rightarrow y=ce^{2x}$

$\underbrace{(y+x^3-c)(y-ce^{2x})}=0$ genel çözüm

Süre 80 dakikadır. Başarılar ....

Doç. Dr. Fatma Hıra