Adı Soyadı: **28.06.2024**
Numarası:

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ FEN FAKÜLTESİ MATEMATİK BÖLÜMÜ

2023-2024 EĞİTİM ÖĞRETİM YILI MAT 468 FONKSİYONEL ANALİZ FİNAL SINAVI SORULARI

1) **a)** $(\mathbb{R}^2, d_a)$ ayrık metrik uzayında $B((0,1),1)$, $B((0,1),2)$ ve $B\left((0,1),\frac{1}{2}\right)$ açık yuvarlarını, $B[(0,1),1]$, $B[(0,1),2]$ ve $B\left[(0,1),\frac{1}{2}\right]$ kapalı yuvarlarını bulunuz ve her bir yuvarı $\mathbb{R}^2$ üzerinde çiziniz.

b) (X,d) bir metrik uzay, $x_0 \in X$ ve $r>0$ olsun. Bu durumda $\overline{B(x_0,r)} = B[x_0,r]$ eşitliği her zaman sağlanır mı? Evet ise ispatlayınız, hayır ise örnek veriniz.

2) **a)** $d:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $d(x,y)=|\arctan x-\arctan y|$ fonksiyonuna göre $(\mathbb{R},d)$ nin bir metrik uzay olduğunu gösteriniz. $(\mathbb{R},d)$ tam metrik uzay mıdır? Açıklayınız.

b) X ve Y iki normlu uzay, $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$, X üzerinde iki denk norm ve $f:X\to Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer f, X üzerindeki $\|\cdot\|_1$ normuna göre sürekli ise $\|\cdot\|_2$ normuna göre de süreklidir, ispatlayınız.

3) **a)** Normlu uzaylarda yakınsak dizi, Cauchy dizisi ve sınırlı dizi kavramlarını açıklayınız ve birer örnek veriniz.

b) $(X,\|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $r>0$ olsun. Bu durumda $B(0,r)=r.B(0,1)$ eşitliğinin sağlandığını gösteriniz.

4) **a)** $a_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n$ genel terimli (a_n) dizisi $l_1=\left\{x=(x_n)\subset\mathbb{R}:\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|<\infty\right\}$ kümesine ait midir? Açıklayınız. Ayrıca l_1 uzayında her $x=(x_n)\in l_1$ için $\|x\|_1=\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$ ile tanımlı $\|\cdot\|_1$

normuna göre $\|x+y\|_1^2+\|x-y\|_1^2=2\left(\|x\|_1^2+\|y\|_1^2\right)$ eşitliği her zaman sağlanır mı? Evet ise ispatlayınız, hayır ise örnek veriniz.

b) l_1 uzayı üzerinde her $x=(x_n)\in l_1$ için $\|x\|_1=\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$ ve $\|x\|_2=\sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n|$ ile tanımlı $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$ normlarının denk olmadığını gösteriniz.

5) **a)** (X,d) bir metrik uzay, $f:\mathbb{N}\to X$ bir fonksiyon olsun. O zaman f, $\mathbb{N}$ üzerinde düzgün süreklidir, ispatlayınız. ($\mathbb{N}$ üzerinde mutlak değer metriğini alabilirsiniz.)

b) $C([0,1])=\{f:[0,1]\to\mathbb{R}\mid f \textit{ sürekli}\}$ kümesi üzerinde $\|f\|=\int_0^1|f(x)|dx$ normunu ele alalım. Buna göre $f(x)=e^{2x}$ ve $g(x)=e^{3x}$ olmak üzere $f\in B(g,e^2)$ midir? Açıklayınız.

6) **a)** $(X,\|\cdot\|_1)$ ve $(Y,\|\cdot\|_2)$ iki normlu uzay ve $Z=X\times Y$ olsun. Buna göre her $(x,y)\in Z$ için $\|(x,y)\|=3\|y\|_2+5\|x\|_1$ ile tanımlı $\|\cdot\|$ fonksiyonu Z üzerinde bir norm mudur? İnceleyiniz.

b) $X\neq\{0\}$ bir normlu uzay olsun. Eğer X Banach ise $A=\{x\in X:\|x\|=1\}$ uzayının da Banach olduğunu ispatlayınız.

Not: Her soruda a) ve b) şıklarından istediğiniz birini cevaplayınız. 1., 3., 5. ve 6. sorular 15 puan, 2. ve 4. soru 20 puandır. Süre 90 dakikadır.

Başarılar…
Doç. Dr. Nilay DEĞİRMEN

1) a) $B((0,1),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d_a((x,y),(0,1)) < 1\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; d_a((x,y),(0,1)) = 0\}$

$= \{(0,1)\}$

$B((0,1),2) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d_a((x,y),(0,1)) < 2\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d_a((x,y),(0,1)) = 0$ veya $1\}$

$= \mathbb{R}^2$

$B((0,1),\frac{1}{2}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d_a((x,y),(0,1)) < \frac{1}{2}\}$

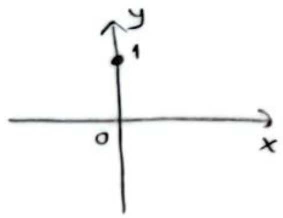
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d_a((x,y),(0,1)) = 0\}$

$= \{(0,1)\}$

$B[(0,1),1] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d_a((x,y),(0,1)) \leq 1\} = \mathbb{R}^2$

$B[(0,1),2] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d_a((x,y),(0,1)) \leq 2\} = \mathbb{R}^2$

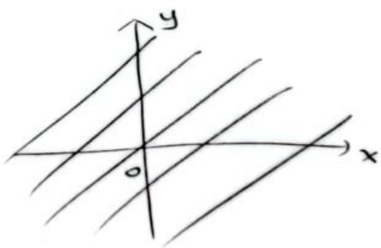
$B[(0,1),\frac{1}{2}] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : d_a((x,y),(0,1)) \leq \frac{1}{2}\} = \{(0,1)\}$



$B((0,1),1)$

$B((0,1),\frac{1}{2})$

$B[(0,1),\frac{1}{2}]$



$B((0,1),2)$

$B[(0,1),1]$

$B[(0,1),2]$

b) $\overline{B(x_0,r)} = B[x_0,r]$ her zaman sağlanmaz.

$(\mathbb{R}^2, d_a)$ metrik uzayında $\overline{B((0,1),1)} = B((0,1),1) = \{(0,1)\}$

ve $B[(0,1),1] = \mathbb{R}^2$ olup $\overline{B((0,1),1)} \neq B[(0,1),1]$ dir.

2) a) $d: \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $d(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$

i) $\forall x,y\in\mathbb{R}$ için $d(x,y) = |\arctan x - \arctan y| \geq 0$ dır

ii) $\forall x,y\in\mathbb{R}$ için $d(x,y) = |\arctan x - \arctan y| = |\arctan y - \arctan x| = d(y,x)$ dir

iii) $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$ için

$$d(x,y) = |\arctan x - \arctan y| = |(\arctan x - \arctan z) + (\arctan z - \arctan y)|$$
$$\leq |\arctan x - \arctan z| + |\arctan z - \arctan y|$$
$$= d(x,z) + d(z,y)$$

dir

O halde $(\mathbb{R}, d)$ bir metrik uzaydır.

$x_n = n$ olmak üzere (x_n) dizisinin $\mathbb{R}$ de d metriğine göre bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim.

$\lim_{n\to\infty} \arctan n = \frac{\pi}{2}$ (mutlak değer metriğine göre) olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ verildiğinde $\forall n \geq n_0$ olduğunda $|\arctan n - \frac{\pi}{2}| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır.

Şimdi $\forall \varepsilon > 0$ ver. $\forall n,m \geq n_0$ old. $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olduğunu iddia ediyoruz, ispatlayalım.

$$d(x_n,x_m) = d(n,m) = |\arctan n - \arctan m|$$
$$\leq |\arctan n - \tfrac{\pi}{2}| + |\arctan m - \tfrac{\pi}{2}|$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$
$$= \varepsilon$$

Dolayısıyla (x_n), $\mathbb{R}$ de d metriğine göre bir Cauchy dizisidir. Bu dizinin $\mathbb{R}$ de d metriğine göre x noktasına yakınsadığını kabul edelim. Bu durumda $d(x_n, x) \to 0$ olur.

$$d(x_n, x) = d(n,x) = |\arctan n - \arctan x| \to 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\arctan n}_{\downarrow\ \frac{\pi}{2}} - \underbrace{\arctan x}_{\downarrow\ \arctan x} \to 0 \Rightarrow \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

Böyle bir x reel sayısı yok. O halde (x_n) yak. olamaz. Dolayısıyla $(\mathbb{R}, d)$ ...

2) b) $f: X \to Y$ X üzerindeki $\| \|_1$ normuna göre sürekli ise $\forall x_0 \in X$ için $\forall \varepsilon > 0$ verildiğinde $\|x - x_0\|_1 < \delta$ old. $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$ o.ş. $\delta > 0$ vardır.

$\| \|_1$ ve $\| . \|_2$ normları denk old. $\forall x \in X$ için $a . \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b \|x\|_1$ o.ş. $a, b > 0$ vardır. O halde $\|x - x_0\|_2 < \boxed{\delta a}$ olduğunda $\|x - x_0\|_1 < \delta$ olup $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$ dur. Dolayısıyla f, $\| . \|_2$ normuna göre de süreklidir.

3) a) Notlarda var.

b) $B(0,r) = \{ x \in X : \|x - 0\| < r \}$

$= \{ x \in X : \|x\| < r \}$

$= \{ x \in X : \| \frac{x}{r} \| < 1 \}$

$\boxed{\frac{x}{r} = y}$

$= \{ r . y \in X : \|y\| < 1 \}$

$= r \{ y \in X : \|y\| < 1 \}$

$= r \, B(0,1)$

4) a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ serisi yakınsaktır. $\left(\frac{1}{3} < 1\right)$ Dolayısıyla (a_n) dizisi ℓ_1 e aittir.

$\|x+y\|_1^2 + \|x-y\|_1^2 = 2 \left(\|x\|_1^2 + \|y\|_1^2 \right)$ eşitliği

her zaman sağlanmaz. Örneğin;

$x = (-1, 1, 0, 0, \dots)$, $y = (1, 1, 0, 0, \dots)$ alınırsa

$\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = 1 + 1 = 2$

$\|y\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| = 1 + 1 = 2$

$x + y = (0, 2, 0, 0, \dots)$, $x - y = (-2, 0, 0, \dots)$

$\|x+y\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n| = 2$

$\|x-y\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n| = 2$

olur. Bu durumda $\|x+y\|_1^2 + \|x-y\|_1^2 = 8$ ve $2(\|x\|_1^2 + \|y\|_1^2) = 16$

olup eşitlik sağlanmaz.

4) b) $\|x\|_2 = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \le \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \|x\|_1$ ... (1)

$\forall k\in\mathbb{N}$ için $q_k = 1-\frac{1}{k}$ olmak üzere $(x_n) = (q_k^{n-1})$

dizisini ele alalım.

$$\|x_n\|_2 = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = 1$$

$$\|x_n\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |q_k^{n-1}| = \sum_{n=1}^{\infty} q_k^{n-1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(q_k^0 + q_k^1 + q_k^2 + \dots + q_k^{n-1}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1-(q_k)^n}{1-q_k}$$

$$\overset{|q_k|<1}{=} \frac{1}{1-q_k} = \frac{1}{1-(1-\frac{1}{k})} = k$$

$\|x_n\|_1 \le m.\|x_n\|_2$ olacak şekilde $m>0$ var mı?

$k \le m.1$, $k\in\mathbb{N}$

Tüm doğal sayılardan büyük bir reel sayı var olmadığından böyle bir $m>0$ yoktur. Dolayısıyla $\|.\|_1$ ve $\|.\|_2$ normları denk değildir.

5) a) $f: \mathbb{N} \to X$ düzgün sürekli $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon>0$ verildiğinde $\forall n,m\in\mathbb{N}$ için $d_1(n,m)<\delta$ olduğunda $d_2(f(n),f(m))<\varepsilon$ o.ş. $\delta(\varepsilon)>0$ var mı?

üzerindeki metrik d_1 (Alışılmış metrik alabiliriz.)

üzerindeki metrik d_2

$\delta = \frac{1}{2}$ seçersek; $d_1(n,m) = |n-m| < \frac{1}{2}$ için $n=m$ olur.

Bu durumda $d_2(f(n),f(m)) = d_2(f(n),f(n)) = 0 < \varepsilon$ olup

f düzgün süreklidir.

b) $f \in B(g, e^2)$ mi? yani $\|f-g\| < e^2$ mi?

$$\|f-g\| = \int_0^1 |f(x)-g(x)|\,dx$$

$$= \int_0^1 |e^{2x} - e^{3x}|\,dx = \int_0^1 e^{3x} - e^{2x}\,dx$$

$$= \left(\frac{e^{3x}}{3} - \frac{e^{2x}}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{e^3}{3} - \frac{e^2}{2} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{2e^3 - 3e^2}{6} + \frac{1}{6}$$

$$= \frac{2e^3 - 3e^2 + 1}{6} < e^2$$

olduğundan $f \in B(g, e^2)$ dir.

$$\left[\begin{array}{l} e < 4 \Rightarrow 2e < 8 \Rightarrow 2e + \frac{1}{e^2} < 8 + \frac{1}{e^2} < 8 + 1 = 9 \\ \text{(Bunu biliyoruz.)} \\ \Rightarrow 2e^3 + 1 < 9e^2 \\ \Rightarrow 2e^3 - 3e^2 + 1 < 6e^2 \\ \Rightarrow \frac{2e^3 - 3e^2 + 1}{6} < e^2 \end{array}\right]$$

6) a) $\|(x,y)\| = 3\|y\|_2 + 5\|x\|_1$

i) $\forall (x,y) \in Z$ için $\|(x,y)\| = 3\underbrace{\|y\|_2}_{\geq 0} + 5\underbrace{\|x\|_1}_{\geq 0} \geq 0$ dır.

ii) $\forall (x,y) \in Z$ ve $\forall \lambda \in K$ için

$$\|\lambda (x,y)\| = \|(\lambda x, \lambda y)\| = 3 \cdot \|\lambda y\|_2 + 5\|\lambda x\|_1$$

$$= 3 \cdot |\lambda| \cdot \|y\|_2 + 5|\lambda| \cdot \|x\|_1$$

$$= |\lambda| \cdot (3 \cdot \|y\|_2 + 5\|x\|_1)$$

$$= |\lambda| \cdot \|(x,y)\|$$

dir.

iii) $\|(x,y)\| = 0 \Leftrightarrow 3\|y\|_2 + 5\|x\|_1 = 0 \Leftrightarrow \|y\|_2 = \|x\|_1 = 0$

$\Leftrightarrow y = 0$ ve $x = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$

iv) $\forall (x,y), (a,b) \in Z$ için

$$\|(x,y)+(a,b)\| = \|(x+a,\, y+b)\|$$
$$= 3\|y+b\|_2 + 5\|x+a\|_1$$
$$\leq 3(\|y\|_2 + \|b\|_2) + 5(\|x\|_1 + \|a\|_1)$$
$$= (3\|y\|_2 + 5\|x\|_1) + (3\|b\|_2 + 5\|a\|_1)$$
$$= \|(x,y)\| + \|(a,b)\|$$

olduğundan $\|.\|$, Z üzerinde bir normdur.

b) Notlarda var.