Adı Soyadı:
Numarası:

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**Toplam**

MAT478 ÖKLİDYEN OLMAYAN GEOMETRİ ARA SINAVI (29.04.2024)

Soru 1: $\vec{x}, \vec{y} \in IL^2$ future-pointing ve time-like vektörler olsun. Bu durumda;

$$\|\vec{x}+\vec{y}\| \geq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|, \text{(Lorentz Uzayında Üçgen Eşitsizliği)},$$

ifadesinin doğruluğunu gösteriniz.

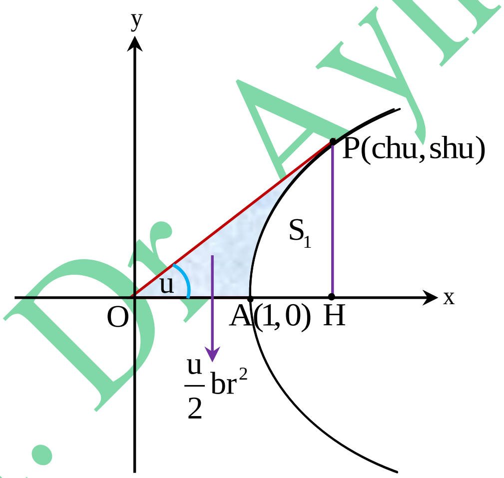
Soru 2: IL^2 de A(u) dönme matrisine karşılık gelen

$$A : IL^2 \to IL^2$$

lineer dönüşümünün iki nokta arasındaki uzaklığı koruduğunu gösteriniz.

Soru 3: Bir parametreli düzlemsel bir L/L' Lorentz hareketinde L düzleminin (P) hareketli pol eğrisi L' düzleminin (P') sabit pol eğrisi üzerinde kaymaksızın yuvarlandığını gösteriniz.

Soru 4: $x^2 - y^2 = 1$ Lorentz çemberi üzerindeki P noktasının koordinatları için kullanılan hiperbolik radyan açı u olmak üzere taralı bölgenin alanının $\frac{u}{2} br^2$ olduğunu gösteriniz.



Soru 5: A(lnu) matrisi yardımı ile $\vec{e}_1 = (1,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1)$ birbirine dik olan iki vektörün $u = \ln 4$ kadar dönmeden sonra alacağı yeni konumlarını bulunuz ve dönmeden sonraki yorumu yapınız.

NOT: Süre 90 dakikadır.

Prof. Dr. Ayhan TUTAR

CEVAPLAR

CEVAP 1)

$$(\|x\|+\|y\|)^2 = \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\|+\|y\|^2$$

$$\overset{Schwartz\ E.}{\widetilde{\leqq}} \quad \|x\|^2+\|y\|^2 - 2 < x,y >= -(< x+y, x+y >= \|x+y\|^2$$

$\Rightarrow \ (\|x\|+\|y\|)^2 \leq \|x+y\|^2$

$\Rightarrow \|x\| + \|y\| \leq \|x+y\|$ dir.

CEVAP 2) $x = (x_1, x_2)$, $\ y = (y_1, y_2)$ $\mathbb{L}^2$ de iki nokta olsun.

$\overrightarrow{xy} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2)$

olur.

$$d(x,y) = \|\overrightarrow{xy}\| = |(y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2|^{1/2}$$

dir. Diğer taraftan,

$$\overrightarrow{\mathcal{A}(u)x} = (x_1 chu + x_2 shu, x_1 shu + x_2 chu),$$
$$\overrightarrow{\mathcal{A}(u)y} = (y_1 chu + y_2 shu, y_1 shu + y_2 chu)$$

dır. Buna göre,

$$\begin{aligned}
d\left(\overrightarrow{\mathcal{A}(u)x}, \overrightarrow{\mathcal{A}(u)y}\right) &= \left\|\overrightarrow{\mathcal{A}(u)x\mathcal{A}(u)y}\right\| \\
&= \|((y_1 - x_1)chu + (y_2 - x_2)shu), ((y_1 - x_1)shu + (y_2 - x_2)chu))\| \\
&= |(y_1 - x_1)^2 ch^2u + (y_2 - x_2)^2 sh^2u + 2(y_1 - x_1)(y_2 - x_2)shuchu \\
&\quad -(y_1 - x_1)^2 sh^2u - (y_2 - x_2)^2 ch^2u - 2(y_1 - x_1)(y_2 - x_2)shuchu|^{1/2} \\
&= \left|(y_1 - x_1)^2 \underbrace{(ch^2u - sh^2u)}_{1} - (y_2 - x_2)^2 \underbrace{(ch^2u - sh^2u)}_{1}\right|^{1/2} \\
&= \ |(y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2|^{1/2} \\
&= \|\overrightarrow{xy}\| \\
&= d(x,y)
\end{aligned}$$

dir.

CEVAP 3) Her t anında hareketli (P) pol eğrisi ve sabit (P') pol eğrisi birbirlerine teğet olduklarını biliyoruz. (P) nin t_0, t_1e karşılık gelen noktaları arasındaki yay uzunluğu,

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \|\overrightarrow{V_r}\| dt \Rightarrow ds = \|\overrightarrow{V_r}\| dt \qquad (*)$$

dir.

(P') nın t_0, t_1e karşılık gelen noktaları arasındaki yay uzunluğu,

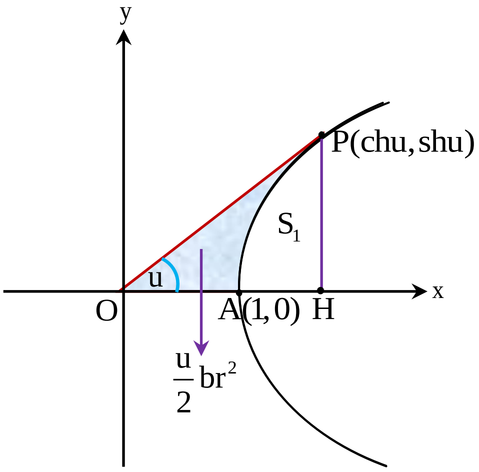
$$s' = \int_{t_0}^{t_1} \|\overrightarrow{V_a}\| dt \Rightarrow ds' = \|\overrightarrow{V_a}\| dt \qquad (**)$$

olur. Pol eğrileri elde edilirken $\overrightarrow{V_f} = 0$ olduğunu biliyoruz. Bu durumda, $\overrightarrow{V_a} = \overrightarrow{V_r}$ olacağından $\|\overrightarrow{V_a}\| = \|\overrightarrow{V_r}\|$ dır. $(*)$ve $(**)$ dan

$$ds = ds'$$

elde edilir. Bu ise L düzleminin (P) hareketli pol eğrisisin L' düzleminin (P') sabit pol eğrisi üzerinde kaymaksızın yuvarlanması demektir.

CEVAP 4)



Toplam alanımız A olsun. Toplam alan üçgenin alanı olup;

$$A = \frac{|OH||PH|}{2} = \frac{1}{2} chu.shu \text{ olur.}$$

Şimdi S_1 in alanını bulalım:

$x^2 - y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = x^2 - 1 \Rightarrow y = \sqrt{x^2 - 1}$ dir.

$$S_1 = \int_1^{chu} ydx = \int_1^{chu} \sqrt{x^2 - 1}dx = \left(\frac{1}{2}x.\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right|\right)\Big|_1^{chu}$$

$$S_1 = \frac{1}{2}chu.\sqrt{\underbrace{ch^2u - 1}_{sh^2u}} - \frac{1}{2}ln\left|chu + \sqrt{\underbrace{ch^2u - 1}_{sh^2u}}\right| - 0$$

$$S_1 = \frac{1}{2}chu.shu - \frac{1}{2}ln|chu + shu| \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (*)$$

$shu = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$ ve $shu = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$ olduğundan $chu + shu = \frac{e^u - e^{-u} + e^u + e^{-u}}{2} = e^u$ elde edilir.

Bu değer $(*)$ ifadesinde yerine yazılırsa

$S_1 = \frac{1}{2}chu.shu - \frac{1}{2}ln|e^u| = \frac{1}{2}chu.shu - \frac{1}{2}u$ bulunur. Buna göre, istenen alan

$S = A - S_1 = \frac{1}{2}chu.shu - \frac{1}{2}chu.shu + \frac{1}{2}u$

$S = \frac{1}{2}u \; br^2$ dir.

CEVAP 5)

$$< \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2} >=< (1,0), (0,1) >= 0,$$
$$\|\overrightarrow{e_1}\| = \sqrt{|< (1,0), (1,0) >|} = 1,$$
$$\|\overrightarrow{e_2}\| = \sqrt{|< (0,1), (0,1) >|} = 1$$

dir.

$u = ln4 \Rightarrow chu = \frac{1}{2}(e^{ln4} + e^{-ln4}) = \frac{1}{2}\left(4 + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{4}\right) = \frac{17}{8},$

$$sh(ln4) = \frac{1}{2}(e^{ln4} - e^{-ln4}) = \frac{1}{2}\left(4 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{15}{4}\right) = \frac{15}{8}$$ den

$\mathcal{A}(ln4) = \begin{bmatrix} ch(ln4) & sh(ln4) \\ sh(ln4) & ch(ln4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17/8 & 15/8 \\ 15/8 & 17/8 \end{bmatrix}$ elde edilir.

$$\left(\mathcal{A}(ln4)\right)\overrightarrow{e_1} = \begin{bmatrix} 17/8 & 15/8 \\ 15/8 & 17/8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17/8 \\ 15/8 \end{bmatrix}$$

ve

$$\left(\mathcal{A}(ln4)\right)\overrightarrow{e_2} = \begin{bmatrix} 17/8 & 15/8 \\ 15/8 & 17/8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15/8 \\ 17/8 \end{bmatrix}$$

bulunur.

Lorentz anlamında $u = ln4$ hiperbolik radyanlık dönmeden sonra $\left(\mathcal{A}(ln4)\right)\overrightarrow{e_1}$ ve $\left(\mathcal{A}(ln4)\right)\overrightarrow{e_2}$ vektörleri için

$$< \left(\mathcal{A}(ln4)\right)\overrightarrow{e_1}, \left(\mathcal{A}(ln4)\right)\overrightarrow{e_2} >= 0,$$
$$\left\|\left(\mathcal{A}(ln4)\right)\overrightarrow{e_1}\right\| = \sqrt{\frac{289 - 225}{64}} = 1,$$
$$\left\|\left(\mathcal{A}(ln4)\right)\overrightarrow{e_2}\right\| = \sqrt{\left|\frac{225 - 289}{64}\right|} = 1$$

dir. Buna göre; $u = ln4$ hiperbolik radyanlık dönmeden sonra $\left(\mathcal{A}(ln4)\right)\overrightarrow{e_1}$ ve $\left(\mathcal{A}(ln4)\right)\overrightarrow{e_2}$ vektörleri birbirlerine yine diktir ve her bir vektörün boyu korunmuş olur.