

| MAT 465 Alt Manifoldların Geometrisi I Kısa Sınav Soruları |                   |
|------------------------------------------------------------|-------------------|
| Ad-Soyad:                                                  | Tarih: 21.10.2025 |
| Numara:                                                    | Puan:             |
| İmza:                                                      |                   |

1. Bir topolojik uzayın topolojik manifold belirtmesine dair koşulları topolojik atlastan bahsedecek şekilde yazınız.

*Cevap:*

$M$  bir topolojik uzay olsun. Eğer  $M$  uzayı Hausdorff, 2.sayılabılır ve  $M$  kümesi her biri  $\mathbb{R}^n$  nin kendisine veya bir açık alt kümesine homeomorf olan açık alt kümelerin birleşimi olarak yazılabiliyor, yani

$$M = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$$

olacak biçimde  $\varphi_\alpha : U_\alpha \subset M \rightarrow V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$  homeomorf dönüşümler var, olma öelliklerini sağlar ise  $M$  ye  $n$ -boyutlu topolojik manifold denir. Bu durumda  $\left\{(\varphi_\alpha, U_\alpha)\right\}_{\alpha \in \Lambda}$  ailesi  $M$  manifoldunun bir topolojik atlası adını alır.

2.  $S^1$  çemberinin topolojik manifold belirtme sürecini kısaca anlatınız.

*Cevap:*

$\mathbb{R}$  Reel sayılar kümesi üzerinde aşağıdaki bağıntıyı tanımlayalım.

$$x \sim y \Leftrightarrow y = x + m, m \in \mathbb{Z}.$$

Bu bağıntıya göre  $\mathbb{R}/\sim$  bölüm kümesi 1-boyutlu topolojik manifold belirtir. Bu manifold  $\mathbb{R}/\sim \cong S^1$  dır.

3. Topolojik manifoldlar ve reel vektör uzaylar arasındaki ilişkiyi açıklayınız.

*Cevap:*

Topolojik manifoldlar ve reel vektör uzaylar arasındaki ilişkiden bahsederken öncelikle vektör uzayının boyutu hakkında bir bilgi vermeliyiz. İlk olarak sonlu boyutlu olma durumunu ele alalım. Böyle bir durumda her sonlu boyutlu reel vektör uzayları birer topolojik manifold belirtir. Ancak her topolojik manifold sonlu boyutlu bir reel vektör uzay yapısı göstermek zorunda değildir. Diğer taraftan vektör uzayının sonsuz boyutlu olması durumunda genel olarak böyle bir ilişkiden bahsedemeyiz.

4. Boştan farklı  $M$  kümesi, üzerinde tanımlı bir iç işlem ve bir dış işlem sayesinde  $K$  cismi üzerinde reel vektör uzay yapısı gösterebilir.  $M$ ' nin bir topolojik manifold belirtmesi için ne yapılması gerektiğini kısaca açıklayınız.

*Cevap:*

Elimizde bir  $M$  reel vektör uzayı var olsun. Her sonlu boyutlu reel vektör uzaylarının birer topolojik manifold belirttiği bilgisine dayanarak  $\text{boy}M$ ' nin sonlu olup olmadığını araştırırız. Bunun  $M$  ile  $\mathbb{R}^n$  uzayı arasında bir izomorfizma kurulmasıyla elde edilebileceğini söyleyebiliriz. Çünkü vektör uzaylar arasında tanımlı izomorfizma dönüşümleri boyutları korur. O zaman  $\text{boy}M = n < \infty$  bulunur.

5.  $M$  bir topolojik manifold ve  $M$  üzerinde bir denklik bağıntısı  $R$  olsun.  $M/R$  bölüm kümesinin bölüm manifoldu belirtme sürecini açıklayınız.

*Cevap:*

$M$  üzerinde tanımlı

$$\pi : M \rightarrow M/R$$

bölüm dönüşümü yardımıyla  $M/R$  bölüm kümesi üzerine bir topoloji koyulabilir. Bu topoloji ile  $M/R$  kümesi bir topolojik uzay olur.

$\pi$  dönüşümü açık dönüşüm olsun. Bu takdirde

$M/R$  uzayı Hausdorff  $\Leftrightarrow R$  bağıntısı  $M \times M$ ' de kapalı bir kümedir.

Eğer  $M$  2. sayılabilir  $\Rightarrow M/R$  uzayı 2. sayılabilir.

önergeleri yardımıyla topolojik manifold olmanın ilk iki özelliği gösterilebilir. Son özellik olan Lokal Öklidyen olma durumu  $M$  manifolduna ve  $M/R$  bölüm uzayına göre değişmektedir.

6. Bir smooth manifoldu bir topolojik manifolddan ayıran özelliği kısaca açıklayarak belirtiniz.

*Cevap:*

$M$  bir topolojik manifold ve  $\left\{(\varphi_\alpha, U_\alpha)\right\}_{\alpha \in \Lambda}$  ailesi  $M$  nin bir topolojik atlası olsun. Eğer topolojik atlas  $C^\infty$ -atlas olma, yani  $\left\{(\varphi_\alpha, U_\alpha)\right\}_{\alpha \in \Lambda}$  ailesinin her bir üyesinin (haritalar) uyumlu olma, bir başka deyişle koordinatlar arasında tanımlı geçiş dönüşümlerinin difeomorfizma olma özelliğine sahipse  $M$  smooth manifold olarak adlandırılır.

7. 3-boyutlu Yüzey teori'de parametre değiştirme teoreminin var olduğu biliniyor. Bu teoremin manifold teori'ye doğrudan uyarlanamamasını açıklayınız.

*Cevap:*  $S \subset \mathbb{R}^3$  kümesi bir düzgün yüzey olsun. Bu alt küme ilişkisi fiziksel doğamız gereği vardır. Bu yüzden parametre değiştirme teoremi, çevreleyen (ambient) uzay  $\mathbb{R}^3$ ' ün varlığıyla kanıtlanabilir. Ancak böyle bir yaklaşım manifold teori'de yoktur. Çünkü smooth manifoldların her zaman gömülebilir olduğu bir çevreleyen uzayı bulunmayabilir.

**Not: Sadece 5 soru cevaplayınız. Başarılar.**