

1. soru	2. soru	3. soru	4. soru	Toplam

Adı Soyadı:

21.04.2025

Numara:

MAT 212 ANALİZ IV DERSİ QUIZ SINAV SORULARI

1) $f(x,y) = xy + y^2$ fonksiyonunun $(3,2)$ noktasında hangi $\vec{v}$ vektörü yönündeki yönlü türevi sıfırdır? Nedenini açıklayınız.

$$2) f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

fonksiyonunun kısmi türevlerini bulunuz. $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ noktasında diferansiyellenebilir olup olmadığını inceleyiniz.

3) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x,y) = f(xy)$ olarak veriliyor. $x \frac{\partial g}{\partial x} = y \frac{\partial g}{\partial y}$ olduğunu gösteriniz.

$$4) f(x,y) = (x^2, xy), g(x,y) = x^2 + y^2$$

olduğuna göre $D(g \circ f)(x,y)$ (veya $J_{g \circ f}(x,y)$) ifadesini bulunuz.

Not: Her soru eşit puanlıdır. Süre 60 dakikadır.

Prof. Dr. Birsen Sağır Duyar

Suiz, Çözümler

1) $\vec{u} = (u_1, u_2)$ birim vektör olsun. $u_1^2 + u_2^2 = 1$ dir.

$$f_x = y, \quad f_x(3,2) = 2; \quad f_y = x + 2y, \quad f_y(3,2) = 7$$

$$D_{(u_1, u_2)} f(3,2) = \langle (f_x(3,2), f_y(3,2)), (u_1, u_2) \rangle = 0$$

$$\Rightarrow 2u_1 + 7u_2 = 0 \Rightarrow u_2 = -\frac{2}{7}u_1$$

$$u_1^2 + u_2^2 = 1 \Rightarrow u_1^2 + \frac{4}{49}u_1^2 = 1 \Rightarrow \frac{53}{49}u_1^2 = 1$$

$$\Rightarrow u_1^2 = \frac{49}{53} \Rightarrow u_1 = \frac{7}{\sqrt{53}}, \quad u_1 = -\frac{7}{\sqrt{53}}$$

$$u_2 = -\frac{2}{\sqrt{53}}, \quad u_2 = +\frac{2}{\sqrt{53}}$$

$$\left(-\frac{7}{\sqrt{53}}, \frac{2}{\sqrt{53}}\right), \left(\frac{7}{\sqrt{53}}, -\frac{2}{\sqrt{53}}\right)$$

yönlerinde yönü türetilir sıfırdır.

4) $f(x,y) = (x^2, xy)$, $g(x,y) = x^2 + y^2$, $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$D(g \circ f)(x,y) = Dg(f(x,y)) Df(x,y) \Rightarrow$$

$$\underbrace{J_{g \circ f}(x,y)}_{(1 \times 2)} = \underbrace{J_g(f(x,y))}_{(1 \times 2)} \cdot \underbrace{J_f(x,y)}_{(2 \times 2)}$$

$$J_f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 0 \\ y & x \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$J_g f(x,y) = (2x^2, 2xy)$$

$$J_{g \circ f}(x,y) = (2x^2, 2xy)_{1 \times 2} \cdot \begin{bmatrix} 2x & 0 \\ y & x \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$= (4x^3 + 2xy^2, 2x^2y)_{1 \times 2}$$

2) $(x,y) \neq (0,0)$ için f_x, f_y bulalım:

$$f_x(x,y) = \frac{2xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^3y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \quad f_y(x,y) = \frac{2x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^3y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$f_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0, \quad f_y(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0$$

$$\Rightarrow f_x(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^3y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_y(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^2y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$(x,y) \neq (0,0)$ için f_x, f_y kısmi türevleri mevcut ve süreklidir. $(0,0)$ da bakalım sürekli mi? f_x, f_y $(0,0)$ da süreklidir. Çünkü,

$\forall \varepsilon > 0, 0 \leq \|(x,y) - (0,0)\| < \delta$ iken

$\|f_x(x,y) - f_x(0,0)\| < \varepsilon$ olarak şekilde $\delta > 0$ bulmalıyız.

$$|f_x(x,y) - f_x(0,0)| = \left| \frac{2xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^3y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} - 0 \right|$$

$$\leq \left| \frac{2xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| + \left| \frac{x^3y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} \right|$$

$$< 2|y|^2 + |y|^2 = 3|y|^2 < 3\delta^2 < \varepsilon$$

$$\delta = \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}} \text{ alınırsa } f_x(0,0) \text{ da sürekli olur.}$$

Benzer şekilde $f_y, (0,0)$ da sürekliliği gösterilir.

f_x, f_y $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ de kısmi türevleri var ve sürekli olduğundan $f, (0,0)$ da türelenebilirdir.

$$3) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, g(x, y) = f(xy),$$

$$u = xy \text{ olsun.}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = y \cdot \frac{\partial f}{\partial u}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = x \cdot \frac{\partial f}{\partial u}$$

$$\left. \begin{array}{l} x \cdot \frac{\partial g}{\partial x} = xy \frac{\partial f}{\partial u} \\ y \cdot \frac{\partial g}{\partial y} = xy \frac{\partial f}{\partial u} \end{array} \right\} \Rightarrow x \frac{\partial g}{\partial x} = y \frac{\partial g}{\partial y} \text{ olm.}$$