Ad-Soyad: Cevap Anahtarı

Numara: **10.03.2025**

Lineer Cebir II Kısa Sınav Soruları

NOT: Çözümlerinizi ayrıntılı yazınız. Süre 45 dakikadır. Başarılar.

1) $\mathbb{R}^{1x3}$ vektör uzayında $S=\{[0\ 1\ 1],[1\ 0\ 0],[1\ 0\ 1]\}$ ve $T=\{[1\ 1\ 1],[1\ 2\ 3],[1\ 0\ 1]\}$ sıralı bazları veriliyor. S ye göre koordinatları $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ olan $v \in \mathbb{R}^{1x3}$ vektörünün T ye göre koordinatlarını bulunuz (40 p).

2) $\mathbb{R}^2$ de $u=(a_1,a_2)$, $v=(b_1,b_2)$ vektörleri için $\langle u,v\rangle = a_1b_1 - a_2b_1 - a_1b_2 + 2a_2b_2$ olarak tanımlanan fonksiyonun iç çarpım fonksiyonu olup olmadığını araştırınız (40 p).

3) İki izomorfizmin bileşkesinin izomorfizm olduğunu gösteriniz (20 p).

CamScanner ile tarandı

Lineer - Cebir II Cevap Anahtarı

1) $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times3}$ olsun.

$[\bar{v}]_S = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ dr. O halde,

$$v = 2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 3.\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (-1).\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow v = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

v nin T bazına göre koord. bulalım

$$v = a.\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b.\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + c.\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b+c \\ a+2b \\ a+3b+c \end{bmatrix}$$

a, b, c bulunur.

$[v]_T = \begin{bmatrix} 3 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$ dr

CamScanner ile tarandı

2) $\langle u,v\rangle = a_1b_1 - a_2b_1 - a_1b_2 + 2a_2b_2$ $\quad u=(a_1,a_2)$, $v=(b_1,b_2)$

- Simetri : $\langle u,v\rangle = a_1b_1 - a_2b_1 - a_1b_2 + 2a_2b_2$

$$\underbrace{b_1a_1 - b_1a_2 - b_2a_1 + 2b_2a_2}$$
$$= \langle v,u\rangle$$

simetri özelliği sağlandı

- Bilineerlik: $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ için $w=(c_1,c_2)\in\mathbb{R}^2$ için

$\langle \alpha u+\beta v, w\rangle = \alpha\langle u,w\rangle + \beta\langle v,w\rangle$

$\langle u, \alpha v+\beta w\rangle = \alpha\langle u,v\rangle + \beta\langle u,w\rangle$

olduğu gösterilmelidir.

$\alpha u+\beta v = (\alpha a_1, \alpha a_2) + (\beta b_1, \beta b_2)$
$= (\alpha a_1+\beta b_1, \alpha a_2+\beta b_2)$

$\langle \alpha u+\beta v, w\rangle = \langle(\alpha a+\beta b_1, \alpha a_2+\beta b_2), (c_1,c_2)\rangle$

$= \alpha a_1c_1 - \beta b_1c_1 - \alpha a_2c_1 - \beta b_2c_1 - \alpha a_1c_2 - \beta b_1c_2 + 2\alpha a_2c_2 + 2\beta b_2c_2$

$$= \alpha\underbrace{(a_1c_1 - a_2c_1 - a_1c_2 + 2a_2c_2)}_{\langle u,w\rangle} + \beta\underbrace{(b_1c_1 - b_2c_1 - b_1c_2 + 2b_2c_2)}_{\langle v,w\rangle}$$

olup eşitlik sağlanır. Diğeride benzer şekilde bulunur

- Pozitif tanımlılık: $u=(a_1,a_2)\in\mathbb{R}^2$

$\langle u,u\rangle \geq 0$, $\langle u,u\rangle = 0 \Leftrightarrow u=0$

$\langle u,u\rangle = a_1^2 - a_2a_1 - a_1a_2 + 2a_2^2 = (a_1-a_2)^2 + a_2^2 > 0$

$\langle u,u\rangle = 0 \Rightarrow \underbrace{(a_1-a_2)^2}_{0} + \underbrace{a_2^2}_{0} = 0 \Rightarrow a_1=0,\ a_2=0 \Rightarrow \bar{u}=(0,0)$ olup

pozf. tanımlılık sağlanır. Dolayısıyla fonksiyon iç çarpım fonksiyonudur.

CamScanner ile tarandı

3) $f: G \to H$

$g: H \to K$ izomorfizmalar olsun

$g \circ f: G \to K$ ile tanımlanan fonksiyonun izomorfizma old gösterilmeliyiz

O halde $g \circ f$ 1-1 ve örten lineer dönüşüm olmalı.

$g \circ f$ <u>1-1 mi ?</u>

f ve g izomorfizma olduğundan 1-1 ve örtenliği sağlar.

O halde $x_1, x_2 \in G$ için $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$y_1, y_2 \in H$ için $g(y_1) = g(y_2) \Rightarrow y_1 = y_2$

$$g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \Rightarrow x_1 \overset{?}{=} x_2$$

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2))$$

g 1-1 olduğu

$$\underbrace{f(x_1) = f(x_2)}_{f\ 1\text{-}1\ \text{old}} \quad x_1 = x_2 \text{ olup } g \circ f \text{ 1-1 dir}$$

<u>$g \circ f$ örten midir ?</u>

f ve g örten olduklarından $\forall h \in H$ için bir $f(x) = h$ o.s $x \in G$ vardır

$\forall k \in K$ için bir $g(y) = k$ o.s $y \in G$ vardır

O halde $\forall$ $k \in K$ için $g \circ f(x) = k$ o.s $x \in G$ var mıdır?

$g \circ f(x)$

$g(f(x)) = k$ o.s $f(x) = h \in H$ vardır

g örten old f örten old $x \in G$ vardır

O halde $g \circ f$ örtendir.

CamScanner ile tarandı

Ayrıca $\qquad x, y \in G, \; c \in \mathbb{R}$

f lineer dönüşüm olduğundan

$$(gof)(cx+y) = g(f(cx+y))$$

$$= g(cf(x) + f(y))$$

g lineer dönüşüm old

$$= c\,g(f(x)) + g(f(y))$$

$$= c(gof)(x) + (gof)(y)$$

olup gof lineer dönüşümdür

Ohalde gof 1-1, örten ve lineer dönüşüm old. için bir izomorfizmadır.

CamScanner ile tarandı