Ad Soyad: ______________________________

No: ______________________________

Tarih: 06.04.2026

Cevap Anahtarı

Lineer Cebir II Quiz Sınavı Soruları

Not: 1. soru 40 puan, 2. soru 40 puan, 3. soru 20 puandır.

1. (40 puan)
$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + 3z = 0\}$ kümesi $\mathbb{R}^3$ uzayının bir alt vektör uzayı mıdır? Kümenin bir bazını bulunuz ve boyutunu belirtiniz.

2. (40 puan)
R^2 uzayında standart olmayan bir iç çarpım $\langle u, v\rangle = 3x_1y_1 + 2x_2y_2$ şeklinde tanımlanıyor. $u_1 = (1, 1)$ ve $u_2 = (1, 0)$ vektörlerini kullanarak bu verilen iç çarpıma göre ortonormal bir taban elde ediniz.

3. (20 puan)
V bir iç çarpım uzayı olsun. $\|u\| = 3$, $\|v\| = 4$ ve $\langle u, v\rangle = 2$ ise $\|2u - v\|$ değerini bulunuz.

Soru 1: $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + 3z = 0\}$

✓ $(0,0,0) \in W$

$X = (x_1, y_1, z_1), Y = (x_2, y_2, z_2) \in W$ iken $X + Y = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \overset{?}{\in} W$

$$\underbrace{2x_1 - y_1 + 3z_1}_{\substack{X \in W \\ \text{old. } 0}} + \underbrace{2x_2 - y_2 + 3z_2}_{\substack{Y \in W \text{ old} \\ \text{sıfır}}} = \underbrace{2(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) + 3(z_1 + z_2)}_{0}$$

olup O halde $X + Y \in W$ dir.

$X = (x_1, y_1, z_1) \in W$ ve $c \in \mathbb{R}$ için $c.X = (cx_1, cy_1, cz_1) \overset{?}{\in} W$

$$2cx_1 - cy_1 + 3cz_1 = c\underbrace{(2x_1 - y_1 + 3z_1)}_{\substack{X \in W \text{ old} \\ 0}} = 0$$

Yani $cX \in W$ dir.

O halde W, $\mathbb{R}^3$ uzayının bir alt vektör uzayıdır.

Not: $2x - y + 3z = 0$ denklemi, orijinden geçen düzlemi temsil eder. Orijinden geçen tüm düzlemler $\mathbb{R}^3$ ün bir alt uzayıdır.

$$2x - y + 3z = 0 \Rightarrow y = 2x + 3z \Rightarrow (x, 2x + 3z, z)$$

$(x, 2x + 3z, z) = x(1,2,0) + z(0,3,1)$ olup

$\{(1,2,0), (0,3,1)\}$ kümesi germeyi sağlar

$c_1(1,2,0) + c_2(0,3,1) = (0,0,0)$ iken $c_1 = c_2 = 0$ olup lineer bağımsız

O halde $\{(1,2,0), (0,3,1)\}$ W kümesinin bir bazıdır.

$\text{Boy}(W) = 2$ dir.

Soru 2: $\{u_1, u_2\} \longrightarrow \{v_1, v_2\} \longrightarrow \{E_1, E_2\}$

lineer bağımsız vektör sistemi — ortogonal vektör sistemi — ortonormal vektör sistem

$$v_1 = u_1 = (1,1)$$

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 = \left(\frac{2}{5}, -\frac{3}{5}\right)$$

$$E_1 = \|v_1\| = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,1)$$

$$E_2 = \|v_2\| = \left(\frac{2}{\sqrt{30}}, -\frac{3}{\sqrt{20}}\right)$$

Soru 3:

$$\|2u - v\| = \sqrt{\langle 2u-v, 2u-v\rangle}$$

$$= \sqrt{4\langle u,u\rangle - 2\langle u,v\rangle - 2\langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle}$$

Simetri öz. $\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = \langle \vec{v}, \vec{u}\rangle$

$$= \sqrt{4\langle u,u\rangle - 4\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle}$$

$\|u\| = \sqrt{\langle u,u\rangle}$

$\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle}$

$$= \sqrt{4.9 - 4.2 + 16} = \sqrt{36 - 8 + 16} = \sqrt{44}$$

$$= 2\sqrt{11} \; \#$$