

1- Bir topolojik manifoldun smooth manifold belirtmesi, üzerindeki topolojik atlasın C^∞ -atlas özelliğine sahip olmasıyla ilişkilidir. Yani, geçiş fonksiyonlarının smooth özellik göstermesiyle ilişkilidir. Öyleyse verilen $\mathcal{U}$ ve $\mathcal{V}$ homeomorfizmlerinin ters dönüşümlerini bulalım:

$\mathcal{U}: M \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $\mathcal{U}$ dönüşümü

$$(x, y) \rightarrow \mathcal{U}(x, y) = y^{1/3}$$

birebir ve örten (çünkü homeomorfizm) olduğu için $\mathcal{U}^{-1}$ ters dönüşümü vardır. Bu ters dönüşüm

$$\mathcal{U}(x, y) = y^{1/3} = u, u \in \mathbb{R}$$

esitliğini sağlayan $y^2 = x^3$ özelliğindeki (x, y) ikilisinin çözülmesiyle elde edilir. O zaman

$$y^{1/3} = u \Rightarrow y = u^3 \text{ dir. Buradan}$$

$y^2 = x^3$ 'ten $x = u^2$ bulunur. Sonuçta

$$\mathcal{U}^{-1}: \mathbb{R}_{\{u\}} \rightarrow M$$

$$u \rightarrow \mathcal{U}^{-1}(u) = (x(u), y(u)) = (u^2, u^3)$$

elde edilir. Benzer düşünceyle

$$\mathcal{V}^{-1}: \mathbb{R}_{\{v\}} \rightarrow M$$

$$v \rightarrow \mathcal{V}^{-1}(v) = (x(v), y(v)) = (v^{2/3}, v)$$

bulunur. Şimdi geçiş fonksiyonlarına oluşturalım:

$$\Psi \circ \mathcal{U}^{-1}: \mathbb{R}_{\{u\}} \rightarrow \mathbb{R}_{\{v\}}$$

$$u \rightarrow (\Psi \circ \mathcal{U}^{-1})(u) = \Psi(\mathcal{U}^{-1}(u)) = \Psi(u^2, u^3) = u^3$$

geçiş fonksiyonu polinom tipli olup $\mathbb{R}$ kümesi üzerinde smooth özellik gösterir. Diğer geçiş fonksiyonu

$$\varphi \circ \psi^{-1}: \mathbb{R}_{\{v\}} \rightarrow \mathbb{R}_{\{u\}}$$

$$v \rightarrow (\varphi \circ \psi^{-1})(v) = \varphi(\psi^{-1}(v)) = \varphi(v^{2/3}, v) = v^{1/3}$$

dır. Ancak $v=0$ noktasında smooth değildir. Tüm bunlarla $\{(1\mathbb{R}, \varphi), (1\mathbb{R}, \psi)\}$ topolojik atlası C^∞ özellik göstermez. Dolayısıyla

M topolojik manifoldu bu atlas ile birlikte bir smooth manifold olamaz.

2- (i) Notunuzda bulunmaktadır.

(ii) $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} : a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^{3 \times 3}$ kümesi 3×3 tipinde simetrik matrislerin vektör uzayıdır.

$$\varphi: M \rightarrow \mathbb{R}^6, A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}$$

$$A \rightarrow \varphi(A) = (a, b, c, d, e, f)$$

dönüşümü bir lineer izomorfizmdir. Öyleyse

$$\dim M = \dim \mathbb{R}^6 = 6 < \infty$$

olduğundan dolayı M bir topolojik manifold belirtir.

3- Notunuzda bulunmaktadır.

$$4- f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) \rightarrow f(x, y, z) = e^{x^2} + e^{y^2} + e^{z^2} + 5 \quad \text{fonksiyonu için}$$

(i) Kritik noktalar fonksiyonun gradyent vektörü ile ilişkilidir.

$$\text{grad } f = (2x e^{x^2}, 2y e^{y^2}, 2z e^{z^2}) \quad \text{olmak üzere}$$

$\text{grad } f = (0, 0, 0)$ eşitliğini sağlayan $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ elemanları f için kritik noktalarlardır. Öyleyse

$$(2x e^{x^2}, 2y e^{y^2}, 2z e^{z^2}) = (0, 0, 0)$$

eşitliğinden $e^{h(t)} > 0$ olduğundan

$$\rightarrow (x, y, z) = (0, 0, 0) \text{ budur.}$$

$$(ii) f(0,0,0) = e^0 + e^0 + e^0 + 5 = 3 + 5 = 8$$

$$(iii) f^{-1}(2) = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 2 \}$$

$$= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid e^{x^2} + e^{y^2} + e^{z^2} = -3 \}$$

$$= \emptyset \quad \downarrow e^{h(t)} > 0$$

$$(iv) \text{graf}(f) = \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid t = f(x, y, z) \}$$

$$= \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid t = e^{x^2} + e^{y^2} + e^{z^2} + 5 \}$$

5- İmmersiyon araştırması için fonksiyonun Jakobiyen matrisine bakılmalıdır.

$$J(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} (r_1 \cos \frac{x_1}{r_1}) & \frac{\partial}{\partial x_2} (r_1 \cos \frac{x_1}{r_1}) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} (r_1 \sin \frac{x_1}{r_1}) & \frac{\partial}{\partial x_2} (r_1 \sin \frac{x_1}{r_1}) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} (r_2 \cos \frac{x_2}{r_2}) & \frac{\partial}{\partial x_2} (r_2 \cos \frac{x_2}{r_2}) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} (r_2 \sin \frac{x_2}{r_2}) & \frac{\partial}{\partial x_2} (r_2 \sin \frac{x_2}{r_2}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\sin \frac{x_1}{r_1} & 0 \\ \cos \frac{x_1}{r_1} & 0 \\ 0 & -\sin \frac{x_2}{r_2} \\ 0 & \cos \frac{x_2}{r_2} \end{bmatrix}_{4 \times 2}$$

olmak üzere tüm 2×2 alt matrislerinin determinantları incelenmelidir.

$$|J_1(f)| = \begin{vmatrix} -\sin \frac{x_1}{r_1} & 0 \\ 0 & -\sin \frac{x_2}{r_2} \end{vmatrix} = \sin \frac{x_1}{r_1} \sin \frac{x_2}{r_2}$$

$$|J_2(f)| = \begin{vmatrix} -\sin \frac{x_1}{r_1} & 0 \\ 0 & \cos \frac{x_2}{r_2} \end{vmatrix} = -\sin \frac{x_1}{r_1} \cos \frac{x_2}{r_2}$$

$$|J_3(f)| = \begin{vmatrix} \cos \frac{x_1}{r_1} & 0 \\ 0 & -\sin \frac{x_2}{r_2} \end{vmatrix} = -\cos \frac{x_1}{r_1} \sin \frac{x_2}{r_2}$$

$$|J_4(f)| = \begin{vmatrix} \cos \frac{x_1}{r_1} & 0 \\ 0 & \cos \frac{x_2}{r_2} \end{vmatrix} = \cos \frac{x_1}{r_1} \cos \frac{x_2}{r_2}$$

Kabul edelim $|J_1(f)| = \sin \frac{x_1}{r_1} \sin \frac{x_2}{r_2} = 0$ olsun. Buradan

ya $\sin \frac{x_1}{r_1} = 0$ ya da $\sin \frac{x_2}{r_2} = 0$

dır. Yine $\sin \frac{x_1}{r_1} = 0$ olsun. Böylece $\cos \frac{x_1}{r_1} \neq 0$ dır. Diğer taraftan

$|J_3(f)| = -\cos \frac{x_1}{r_1} \sin \frac{x_2}{r_2} = 0$ olsun. Bu ise $\sin \frac{x_2}{r_2} = 0$ olduğunu söyler.

0 zaman $\cos \frac{x_2}{r_2} \neq 0$ dır. Sonuç olarak $|J_1(f)| = |J_3(f)| = 0$ olsa bile

$|J_4(f)| = \cos \frac{x_1}{r_1} \cos \frac{x_2}{r_2} \neq 0$ dır. Öyleyse $\text{rank } f = 2$ elde edilir;

yani f bir smooth immersiyondur.