

16.01.2026 Cevap Anahtarı

(1) Aşağıdaki limiti hesaplayınız:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\tan^2 x + 1 - \cos 2x}$$

Çözüm

Öncelikle temel trigonometrik özdeşlikleri kullanalım.

$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

ve

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

Bunları paydada yerine yazalım:

$$\tan^2 x + 1 - \cos 2x = \frac{1}{\cos^2 x} - (2\cos^2 x - 1)$$

Ortak payda alalım:

$$= \frac{1 - 2\cos^4 x + \cos^2 x}{\cos^2 x}$$

Pay kısmını çarpanlara ayıralım:

$$1 - 2\cos^4 x + \cos^2 x = (1 - \cos^2 x)(1 + 2\cos^2 x)$$

Ancak

$$1 - \cos^2 x = \sin^2 x$$

Dolayısıyla payda

$$\tan^2 x + 1 - \cos 2x = \frac{\sin^2 x(1 + 2\cos^2 x)}{\cos^2 x} = \tan^2 x(1 + 2\cos^2 x)$$

Bu ifadeyi limite geri yazalım:

$$\begin{aligned} \frac{x \sin x}{\tan^2 x + 1 - \cos 2x} &= \frac{x \sin x}{\tan^2 x(1 + 2\cos^2 x)} \\ &= \frac{x \sin x \cos^2 x}{\sin^2 x(1 + 2\cos^2 x)} = \frac{x \cos^2 x}{\sin x(1 + 2\cos^2 x)} \end{aligned}$$

Şimdi limiti alalım:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$$

Buna göre

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos^2 x}{\sin x(1 + 2\cos^2 x)} = \frac{1 \cdot 1}{1 \cdot (1 + 2)} = \frac{1}{3}$$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}} \right)$ limitini bulunuz.

$(x_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}}$ ve $(y_n) = \sqrt{n}$ alınırsa $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n} \right)$ olur. Stolz Teoremiyle $(y_n) \uparrow$ ve $y_n \rightarrow +\infty$ olduğundan

16.01.2026 Cevap Anahtarı

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = k \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n} \right) = k \text{ dir.}$$

Buradan

$$\begin{aligned} (x_{n+1} - x_n) &= \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n+2}} - \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \dots - \frac{1}{\sqrt{2n}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2n+2}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ ve} \\ (y_{n+1} - y_n) &= \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \end{aligned}$$

olur. Stolz Teo. gereği Limit

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{2n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2n+2}} - \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2n+2}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \end{aligned}$$

$\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ eşlenik ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}} + \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{2n+2}} - \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1 \right)}{\sqrt{n} \left(\sqrt{2 + \frac{1}{n}} \right)} + \frac{\sqrt{n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1 \right)}{\sqrt{n} \left(\sqrt{2 + \frac{2}{n}} \right)} - \frac{\sqrt{n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1 \right)}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \\ &= \sqrt{2} + \sqrt{2} - 2 = 2\sqrt{2} - 2 \text{ dur. Yani } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 2\sqrt{2} - 2 \text{ dir} \end{aligned}$$

(3) $a_{n+1} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{a_n}} = \frac{7a_n + 2}{3a_n + 1}$ için $a_1 = 2$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{3 + \frac{1}{a_n}} > 0$

olduğundan $a_n \geq 2$ dir. Öte yandan her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n < 3$ 'tür. Gerçekten

$$a_n < 3 \Rightarrow \frac{1}{a_n} > \frac{1}{3} \Rightarrow 3 + \frac{1}{a_n} > \frac{10}{3} \Rightarrow \frac{1}{3 + \frac{1}{a_n}} < \frac{3}{10} \Rightarrow 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{a_n}} < 2 + \frac{3}{10} = \frac{23}{10} \Rightarrow$$

$$a_{n+1} < \frac{23}{10} < 3$$

bulunur. Sonuç olarak $\forall n \in \mathbb{N}$ için $2 \leq a_n < 3$. (Sınırlılık)

(a_n) artandır $\Leftrightarrow a_1 < a_2 < \dots < a_n < a_{n+1} < a_{n+2} < \dots$.

Yani $a_n < a_{n+1} \Rightarrow a_{n+1} < a_{n+2}$ olmalıdır.

$$a_n < a_{n+1} \Rightarrow 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{a_n}} < 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{a_{n+1}}} \Rightarrow a_{n+1} < a_{n+2}$$

16.01.2026 Cevap Anahtarı

old. dan (a_n) artandır. Sonuç olarak; (a_n) sınırlı & artan old. dan $\sup (a_n)$ -ye yakınsaktır. $a_n \rightarrow L$ olsun. 0 zaman $a_{n+1} \rightarrow L$ olup $a_{n+1} = \frac{7a_n+2}{3a_n+1}$ ifadesinde her iki tarafın limiti alınır

$$L = \frac{7L+2}{3L+1} \Rightarrow 3L^2 - 6L - 2 = 0 \quad L = \frac{6 \mp \sqrt{36 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{6} \Rightarrow$$

$$L = 1 \mp \frac{\sqrt{15}}{3} \text{ olur. } L = \sup(a_n) \text{ olduğundan } L = 1 + \frac{\sqrt{15}}{3} \text{ olur.}$$

(4) f ve g fonksiyonları X üzerinde sınırlı olduğundan,
 $\exists M, N > 0$ öyleki $|f(x)| \leq M$ ve $|g(x)| \leq M \quad \forall x \in X$.

f ve g düzgün sürekli oldukları için, her $\varepsilon > 0$ için

$$\exists \delta_1 > 0 \text{ öyleki } |x - y| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2N},$$

$$\exists \delta_2 > 0 \text{ öyleki } |x - y| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ alalım. $|x - y| < \delta$ için aşağıdaki farkı inceleyelim:

$$|f(x)g(x) - f(y)g(y)|.$$

Bu ifadeyi ekleyip çıkararak yazalım:

$$|f(x)g(x) - f(y)g(y)| = |f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)|.$$

Üçgen eşitsizliğinden,

$$|f(x)g(x) - f(y)g(y)| \leq |f(x)| |g(x) - g(y)| + |g(y)| |f(x) - f(y)|.$$

Sınırlılık kullanılırsa,

$$|f(x)g(x) - f(y)g(y)| \leq M|g(x) - g(y)| + N|f(x) - f(y)|.$$

$|x - y| < \delta$ olduğundan,

$$< M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + N \cdot \frac{\varepsilon}{2N} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Dolayısıyla,

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(y)| < \varepsilon.$$

Bu da $f \cdot g$ fonksiyonunun X üzerinde düzgün sürekli olduğunu gösterir.

(5)

Bir fonksiyonun $x = a$ noktasında sürekli olması için

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

olması gerekir. ε - δ tanımına göre ise her $\varepsilon > 0$ için

$$\exists \delta > 0 \text{ öyleki } |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

olmalıdır.

$$\text{Önce } f(2) \text{ hesaplanır: } f(2) = \frac{2^2+4 \cdot 2}{2-1} = \frac{4+8}{1} = 12.$$

16.01.2026 Cevap Anahtarı

$$|f(x) - f(2)| = \left| \frac{x^2+4x}{x-1} - 12 \right| = \left| \frac{x^2+4x-12(x-1)}{x-1} \right|.$$

Pay sadeleştirilirse:

$$x^2 + 4x - 12x + 12 = x^2 - 8x + 12.$$

Dolayısıyla

$$|f(x) - f(2)| = \left| \frac{x^2-8x+12}{x-1} \right|.$$

Pay çarpanlara ayrılır:

$$x^2 - 8x + 12 = (x - 2)(x - 6).$$

Buna göre

$$|f(x) - f(2)| = \frac{|x-2||x-6|}{|x-1|}.$$

$|x - 2| < 1$ olacak şekilde $\delta \leq 1$ alalım. Bu durumda $1 < x < 3$ olur ve

$$|x - 6| \leq 5, \quad |x - 1| \geq 1.$$

Dolayısıyla

$$|f(x) - f(2)| \leq 5|x - 2|.$$

$$5|x - 2| < \varepsilon \Rightarrow |x - 2| < \frac{\varepsilon}{5}.$$

Bu nedenle

$$\delta = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{5} \right\}$$

seçilir.

(6) $f(x)$ fonksiyonu parçalı tanımlı olduğundan, süreklilik için geçiş noktaları $x = 0$ ve $x = 1$ 'de limitlerin eşit olması gerekir.

$x = 0$ noktası

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = ae^0 + b + 2 = a + b + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = b \cdot 0^2 + a(0 + 3) = 3a$$

Süreklilikten:

$$a + b + 2 = 3a \Rightarrow b = 2a - 2$$

$x = 1$ noktası

16.01.2026 Cevap Anahtarı

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = b(1)^2 + a(1 + 3) = b + 4a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 7a(1) + b\cos(\pi) = 7a - b$$

Süreklilikten:

$$b + 4a = 7a - b \Rightarrow 2b = 3a \Rightarrow b = \frac{3a}{2}$$

a ve b'nin bulunması

(1) ve (2)'yi birlikte çözersek:

$$2a - 2 = \frac{3a}{2} \Rightarrow 4a - 4 = 3a \Rightarrow a = 4$$

$$b = 2a - 2 = 6$$

2. g(x) fonksiyonunun x = 3'te sürekliliği

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4 - \sqrt{6x-2}}{x^2 - 9} = \left(\frac{0}{0} \right)$$

Pay eşlenikle çarpılır:

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(4 - \sqrt{6x-2})(4 + \sqrt{6x-2})}{(x^2 - 9)(4 + \sqrt{6x-2})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{16 - (6x-2)}{(x-3)(x+3)(4 + \sqrt{6x-2})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{18 - 6x}{(x-3)(x+3)(4 + \sqrt{6x-2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-6(x-3)}{(x-3)(x+3)(4 + \sqrt{6x-2})} = \frac{-6}{6(4+4)} = -\frac{1}{8}$$

Süreklilik şartı:

$$c + 1 = -\frac{1}{8} \Rightarrow c = -\frac{9}{8}$$

Sonuç

$$\boxed{a = 4, \quad b = 6, \quad c = -\frac{9}{8}}$$

(8) Fonksiyonun tanımlı olabilmesi için pay ve paydanın ayrı ayrı anlamlı olması gerekir.

1. Logaritma koşulları

$\log_x(\cdot)$ ifadesinin tanımlı olabilmesi için aşağıdaki koşullar sağlanmalıdır:

• Taban koşulu:

$$x > 0, \quad x \neq 1$$

16.01.2026 Cevap Anahtarı

- Argüman koşulu:

$$x^2 - 8x + 15 > 0$$

İkinci eşitsizliği çözelim:

$$x^2 - 8x + 15 = (x - 3)(x - 5) > 0$$

$$\Rightarrow x < 3 \text{ veya } x > 5$$

2. Payda (karekök) koşulu

Paydada bulunan karekök ifadesi tanımlı ve sıfırdan farklı olmalıdır:

$$\sqrt{4 - |3 - x|}$$

Buna göre:

$$4 - |3 - x| > 0$$

$$|3 - x| < 4$$

$$-4 < 3 - x < 4$$

$$-1 < x < 7$$

3. Tüm koşulların birlikte sağlanması

Elde edilen tüm koşullar:

$$x > 0, \quad x \neq 1, \quad (x < 3 \text{ veya } x > 5), \quad -1 < x < 7$$

Bu koşulların kesişimi alınır:

$$(0,3) \setminus \{1\} \text{ ve } (5,7)$$

Sonuç:

$$\boxed{D(f) = (0,1) \cup (1,3) \cup (5,7)}$$

(9) Kendisi, küpünün bir fazlasına eşit olan bir sayının var olduğunu gösteriniz.

Çözüm

Aranan sayı $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$x = x^3 + 1$$

denklemini sağlayan bir gerçekte sayının varlığını göstereceğiz.

Bu eşitliği aşağıdaki fonksiyonu tanımlayarak inceleyelim:

16.01.2026 Cevap Anahtarı

$$f(x) = x^3 + 1 - x.$$

1. Süreklilik

$f(x)$ polinom fonksiyon olduğundan, $\mathbb{R}$ üzerinde her noktada süreklidir.

2. İşaret değişimi

f fonksiyonunun bazı değerlerini hesaplayalım:

$$f(0) = 0^3 + 1 - 0 = 1 > 0,$$

$$f(1) = 1^3 + 1 - 1 = 1 > 0,$$

$$f(-1) = (-1)^3 + 1 - (-1) = -1 + 1 + 1 = 1 > 0,$$

$$f(-2) = (-2)^3 + 1 - (-2) = -8 + 1 + 2 = -5 < 0.$$

Dolayısıyla

$$f(-2) < 0 \quad \text{ve} \quad f(-1) > 0.$$

3. Ara Değer Teoremi

f fonksiyonu $[-2, -1]$ kapalı aralığında sürekli olduğundan ve

$$f(-2) \cdot f(-1) < 0$$

oldüğundan, Ara Değer Teoremine göre

$$\exists c \in (-2, -1) \text{ vardır öyleki } f(c) = 0.$$

Bu da

$$c^3 + 1 - c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c = c^3 + 1$$

eşitliğini sağlayan en az bir gerçektek sayı bulunduğunu gösterir.