

MAT101 – Analiz I

Bütünleme Sınavı

Çözümlü Cevap Anahtarı

Soru 1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos 2x + \sin 2x \cos x}{1 - \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} \quad (\text{L'Hospital kullanmayınız})$$

Çözüm:

Paydaki ifade trigonometrik özdeşlik yardımıyla sadeleştirilir:

$$\sin x \cos 2x + \sin 2x \cos x = \sin(3x)$$

Paydada tanjant toplam formülü kullanılır:

$$\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan x + 1}{1 - \tan x}$$

Buna göre:

$$1 - \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-2 \tan x}{1 - \tan x}$$

Limit ifadesi:

$$\frac{\sin(3x)}{\frac{-2 \tan x}{1 - \tan x}} = -\frac{1 - \tan x}{2 \tan x} \sin(3x)$$

$x \rightarrow 0$ iken

$$\tan x \sim x, \quad \sin(3x) \sim 3x$$

olduğundan:

$$\lim_{x \rightarrow 0} = -\frac{3}{2}$$

Soru 2. Teorem Herhangi iki $x, y \in \mathbb{R}$ ($x < y$) reel sayısı arasında en az bir $r \in \mathbb{Q}$ rasyonel sayısı vardır. Dolayısıyla bu iki reel sayı arasında sonsuz tane rasyonel sayı bulunur.

Çözüm

Bu kanıtı Arşimet İlkesini kullanarak gerçekleştireceğiz.

- Arşimet İlkesinin Uygulanması:** $x < y$ varsayımı altında $y - x > 0$ olduğu açıktır. Arşimet İlkesi'ne göre, öyle bir $n \in \mathbb{N}$ vardır ki;

$$\frac{1}{n} < y - x$$

Bu eşitsizliği düzenlediğimizde $1 < n(y - x)$ veya başka bir deyişle $nx + 1 < ny$ elde ederiz.

2. **Tam Sayı Seçimi:** nx ve ny arasındaki uzaklık 1'den büyüktür. Bu durum, bu iki reel sayı arasında en az bir m tam sayısının bulunduğunu garantiler. Matematiksel olarak m sayısını şu şekilde seçebiliriz:

$$m = \lfloor nx \rfloor + 1$$

Burada $\lfloor \cdot \rfloor$ tamdeğer fonksiyonudur. Tanım gereği $nx < m \leq nx + 1$ olur.

3. **Eşitsizliğin Birleştirilmesi:** Yukarıdaki adımlardan elde ettiğimiz bilgileri birleştirelim:

$$nx < m \leq nx + 1 < ny$$

Buradan $nx < m < ny$ sonucuna ulaşırız.

4. **Rasyonel Sayının Elde Edilmesi:** Eşitsizliğin her tarafını n ($n > 0$) sayısına böldüğümüzde:

$$x < \frac{m}{n} < y$$

$m \in \mathbb{Z}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olduğundan, $r = \frac{m}{n}$ sayısı bir rasyonel sayıdır ($r \in \mathbb{Q}$).

Sonuç

x ile y arasında bir r_1 rasyonel sayısı bulduktan sonra, aynı yöntemi (x, r_1) aralığına uygulayarak bir r_2 rasyonel sayısı daha bulabiliriz. Bu işlem sonsuza kadar tekrarlanabildiği için, herhangi iki reel sayı arasında sonsuz sayıda rasyonel sayı olduğu gösterilmiş olur. $\square$

Soru 3. Görseldeki limit problemini Stolz Teoremi kullanarak çözelim. Stolz-Cesàro Teoremi, $\frac{\infty}{\infty}$ formundaki belirsizliklerde kullanılır. Teorem der ki: Eğer b_n dizisi kesin artan ve $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ ise;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$$

şeklindedir (limit mevcutsa).

Çözüm:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}}{\sqrt{n}}$$

Stolz-Cesàro:
$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2n+2}} - \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$b_{n+1} - b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{2n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2n+2}} - \frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}}$$

$$L = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \right) = 2\sqrt{2} - 2$$

Soru 4. Verilen $g : [-1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun düzgün sürekli olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

$[-1, 4]$ kapalı ve sınırlı bir aralıktır. $[-1, 4] - \{3\}$ dışında g sürekli bir fonksiyondur. $g(3^+) = g(3^-) = g(3)$ olup g her yerde sürekli bir fonksiyondur. Sürekli her fonksiyon, kapalı ve sınırlı bir aralık üzerinde düzgün süreklidir (Heine–Cantor Teoremi). Bundan dolayı

$$\boxed{g \text{ düzgün süreklidir}}$$

Soru 5.

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x}{x - 1}$$

fonksiyonunun $x = 2$ 'de sürekli olduğunu $(\varepsilon - \delta)$ yöntemiyle gösteriniz.

Çözüm:

$$f(2) = \frac{4 + 8}{1} = 12$$

Her $\varepsilon > 0$ için $|x - 2| < \delta$ olduğunda

$$|f(x) - 12| = \left| \frac{x^2 + 4x - 12(x - 1)}{x - 1} \right| = \left| \frac{(x - 2)(x - 6)}{x - 1} \right|$$

bulunur. $|x - 2| < 1/2$ olacak şekilde $\delta \geq 1/2$ alalım. Bu durumda $3/2 < x < 5/2$ olur ve $|x - 6| \leq 9/2, |x - 1| \geq 1/2$ yazılır. Dolayısıyla

$$|f(x) - f(2)| \leq 9|x - 2| \leq 9\delta$$

olur. Bu nedenle $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{9}, 1\}$ alınırsa

$$|f(x) - 12| < \varepsilon$$

sağlanır.

$$\boxed{f \text{ fonksiyonu } x = 2 \text{ noktasında süreklidir}}$$

Soru 6. $(a_n) \rightarrow L \Rightarrow |a_n| \rightarrow |L|$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $(a_n) \rightarrow L$ ise her $\epsilon > 0$ için her $n \geq n_0$ olduğunda $|a_n - L| < \epsilon$ olacak şekilde en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Ters üçgen eşitsizliği ile

$$||a_n| - |L|| \leq |a_n - L|$$

olup $|a_n - L| < \epsilon$ olduğundan her $n \geq n_0$ için

$$||a_n| - |L|| < \epsilon$$

bulunur. Dolayısıyla:

$$|a_n| \rightarrow |L|$$

Soru 7. f fonksiyonu a noktasında sürekli ise, her $\epsilon > 0$ için $|x - a| < \delta$ olduğunda

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon$$

olacak şekilde $\exists \delta > 0$ sayısı vardır. $\epsilon = \frac{|f(a)|}{2}$ sayısı içinde $\exists \delta' > 0$ vardır öyle ki

$$|x - a| < \delta' \Rightarrow ||f(x)| - |f(a)|| < \frac{|f(a)|}{2}$$

Üçgen eşitsizliğinden:

$$|f(x)| \geq |f(a)| - |f(x) - f(a)| > \frac{|f(a)|}{2}$$

Soru 8.

$$f(x) = 6 \cos\left(\frac{2x\pi}{3}\right)$$

Çözüm:

$$f(x) = 6 \cos\left(\frac{2x\pi}{3}\right) \implies T = \frac{2\pi}{2\pi/3} = 3$$

Grafiğin Çizimi İçin Kritik Noktalar: Periyot 3 olduğu için $[0, 3]$ aralığında bir tam dalga oluşur:

$$x = 0 \text{ için: } 6 \cos(0) = 6$$

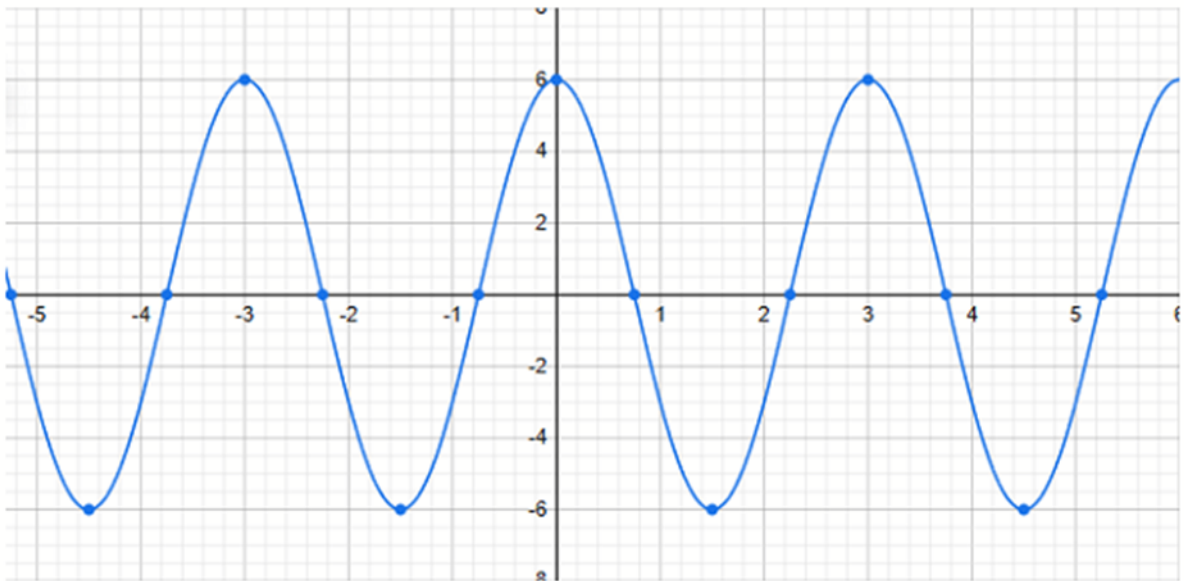
$$x = 0.75 \text{ için: } 6 \cos(\pi/2) = 0$$

$$x = 1.5 \text{ için: } 6 \cos(\pi) = -6$$

$$x = 2.25 \text{ için: } 6 \cos(3\pi/2) = 0$$

$$x = 3 \text{ için: } 6 \cos(2\pi) = 6$$

Grafik, genliği 6 olan kosinüs eğrisidir.



Soru 9. Verilen limit ifadesi uygun kök eşlenikleri kullanılarak hesaplanır ve sonlu bir reel sayıya eşittir. Soru: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + \sqrt{x^2 + \sqrt{x^2}} - \sqrt{x^2}}$ Bu soruda dikkat edilmesi gereken en kritik nokta $x \rightarrow -\infty$ durumudur. Karekök içindeki x^2 dışarıya mutlak değerle çıkar: $\sqrt{x^2} = |x|$. x negatif olduğu için $|x| = -x$ olur. 1. İçerideki kökleri sadeleştirelim: $\sqrt{x^2} = -x\sqrt{x^2 + (-x)}$ (Burada baskın terim yine x^2 olduğu için limit durumunda $\sqrt{x^2}$ gibi davranır). 2. Eşlenik ile çarpma: İfadeyi $A - B$ formunda düşünersek, $A + B$ ile çarpıp bölelim:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^2 + \sqrt{x^2 + \sqrt{x^2}}) - x^2}{\sqrt{x^2 + \sqrt{x^2 + \sqrt{x^2}} + \sqrt{x^2}}$$

Pay kısmında x^2 terimleri birbirini götürür:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + \sqrt{x^2}}}{\sqrt{x^2 + \sqrt{x^2 + \sqrt{x^2}} + \sqrt{x^2}}$$

3. Derece Analizi: Pay ve paydadaki en büyük dereceli terimlere bakalım. Pay kısmında baskın terim $\sqrt{x^2} = |x|$ 'dir. Paydada iki tane $\sqrt{x^2} = |x|$ terimi vardır.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|}{|x| + |x|} = \frac{|x|}{2|x|} = \frac{1}{2}$$