CEVAP ANAHTARI

1. soru	2. soru	3. soru	4. soru	5. soru	6. soru	7. soru	Toplam

Adı Soyadı: **09.06.2026**

Numara:

MAT 102 ANALİZ II DERSİ FİNAL SINAVI SORULARI

1) Yarıçapı 2 cm olan bir küre içine yerleştirilebilecek en büyük hacimli dik silindirin taban yarıçapının kaç cm olacağını bulunuz **(10 puan).**

2) Aşağıda verilen integralleri hesaplayınız **(15 puan).**

a) $\int \frac{e^x-1}{e^x+1}dx$ **b)** $\int \frac{1}{2+\sin x}dx$ **c)** $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x-\sin x}{x^6+\cos x+1}dx$

3) İntegraller için ortalama değer teoremini ifade ediniz **(10 puan).**

4) $y = x^3 - 3x$ eğrisi ile $y = x$ doğrusu arasında kalan bölgenin alanını bulunuz. **(15 puan).**

5) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\int_0^x \cos t^2\,dt}{6\arcsin x-6x-x^3}$ limitini hesaplayınız **(15 puan).**

6) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$ limitini hesaplayınız **(15 puan).**

7) $[a,b]$ aralığında tanımlı reel değerli fonksiyonlar için aşağıda boş bırakılan yerlere **Doğru veya Yanlış** yazınız **(20 puan).**

a) Sınırlı bir fonksiyon integrallenebilirdir ....Yanlış....

b) Sürekli bir fonksiyon integrallenebilirdir ..Doğru....

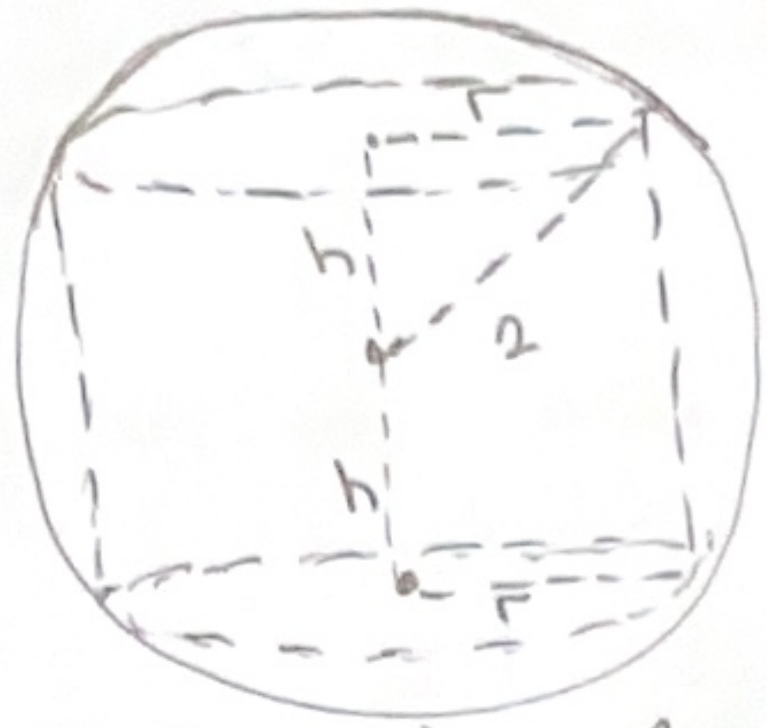
c) İntegrallenebilir bir fonksiyon sınırlıdır....Doğru..

d) Bir fonksiyonun alt Riemann integrali, o fonksiyonun üst Riemann integralinden farklı olabilir......Doğru

e) İntegrallenebilir iki fonksiyonun çarpımının integrali bu fonksiyonların integralleri çarpımına eşittir. ......Yanlış.

Not: 2. sorudaki her şık 5 puan ve 7. sorudaki her şık 4 puandır. Süre 90 dakikadır.

1



$r^2+h^2=4 \Rightarrow r^2=4-h^2$

İstenen hacim V olmak üzere

$V=\pi.r^2.2h$ olur. $r^2=4-h^2$ yerine yazılırsa

$V(h)=\pi.2h(4-h^2)=8\pi h-2\pi h^3$ fonksiyonu bulunur. Bu fonksiyonun maksimum değeri incelenirse. Burada h yüksekliği pozitif olmalı ve $(r\geq 0)$
$4-h^2>0 \Rightarrow (2-h)(2+h)>0$ olup $h\in(-2,2)$ olmalıdır. Ayrıca $h\geq 0$ olduğundan $h\in(0,2)$ yazılır. Ayrıca

$V'(h)=8\pi-6\pi h^2=0 \Rightarrow 6h^2=8 \Rightarrow h^2=\frac{4}{3} \Rightarrow h=\mp\frac{2}{\sqrt{3}}$ olup

$h\geq 0$ iken $h=\frac{2}{\sqrt{3}}$ olur. İşaret tablosu yapılırsa

h	0		$\frac{2}{\sqrt{3}}$		2
$V'(h)$		+	0	−	
$V(h)$		$\nearrow$	maks	$\searrow$	

$h=\frac{2}{\sqrt{3}}$ maks nokta olup

$r^2=4-h^2 \Rightarrow r^2=4-\frac{4}{3} \Rightarrow r^2=\frac{8}{3} \Rightarrow r=\mp\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

olup $r\geq 0$ olduğundan $r=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$ bulunur.

2 a) $\int \frac{e^x-1}{e^x+1}dx=\int\frac{e^x+1-2}{e^x+1}dx=\int 1dx-2\int\frac{1}{e^x+1}dx$

olur. $\int\frac{dx}{e^x+1}$ integralinde $e^x+1=u \Rightarrow e^x.dx=du$ olup

$\int\frac{dx}{e^x+1}=\int\frac{du}{u(u-1)}$ olur. Basit kesirlere ayıralım.

$\frac{1}{u(u-1)}=\frac{A}{u}+\frac{B}{u-1} \Rightarrow 1=A(u-1)+Bu$ olup $u=0 \Rightarrow A=-1$

$u=1 \Rightarrow B=1$

$(u-1)$ $\quad$ u

yazılır. Böylece

$$\int\frac{dx}{e^x+1}=\int\frac{du}{u(u-1)}=-\int\frac{1}{u}du+\int\frac{du}{u-1}=-\ln|u|+\ln|u-1|$$
$$=-\ln|e^x+1|+\ln|e^x|$$
$$=-\ln|e^x+1|+x$$

olup

$$\int\frac{e^x-1}{e^x+1}dx=x+2\ln(e^x+1)-2x+c=-x+2\ln(e^x+1)+c$$

elde edilir.

b) $\int \frac{dx}{2+\sin x}$ integralinde $t = \tan\frac{x}{2}$ değişken değiştirmesi yapalım

$dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$ ve $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ olup

$$\int \frac{dx}{2+\sin x} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{2+\frac{2t}{1+t^2}}\,dt = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{2+2t^2+2t}{1+t^2}}\,dt = \int \frac{dt}{t^2+t+1}$$

olur.

$$\int \frac{dx}{2+\sin x} = \int \frac{dt}{t^2+t+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1} = \int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)+c$$

yazılır. Burada

$$\int \frac{dx}{2+\sin x} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}\right)+c$$

elde edilir

c) Burada $x-\sin x$ tek fonksiyon $x^6+\cos x+1$ çift fonksiyon olup

$f(x) = \frac{x-\sin x}{x^6+\cos x+1}$ tek fonksiyondur. O halde $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x-\sin x}{x^6+\cos x+1}\,dx = 0$

bulunur.

(3) İntegraller için ortalama değer teoremi : $f:[a,b]\to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun O halde $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ olacak şekilde $\exists c \in (a,b)$ vardır.

(4) $y = x^3-3x$ ile $y = x$ doğrusunu ortak gözelim.

$x^3-3x = x \Rightarrow x^3-4x = 0 \Rightarrow x(x^2-4) = 0 \Rightarrow x=0,\ x=-2,\ x=2$

olur. $y = x^3-3x$ eğrisi için $x=0 \Rightarrow y=0$ $\quad y=0 \Rightarrow x=0,\ x=\mp\sqrt{3}$

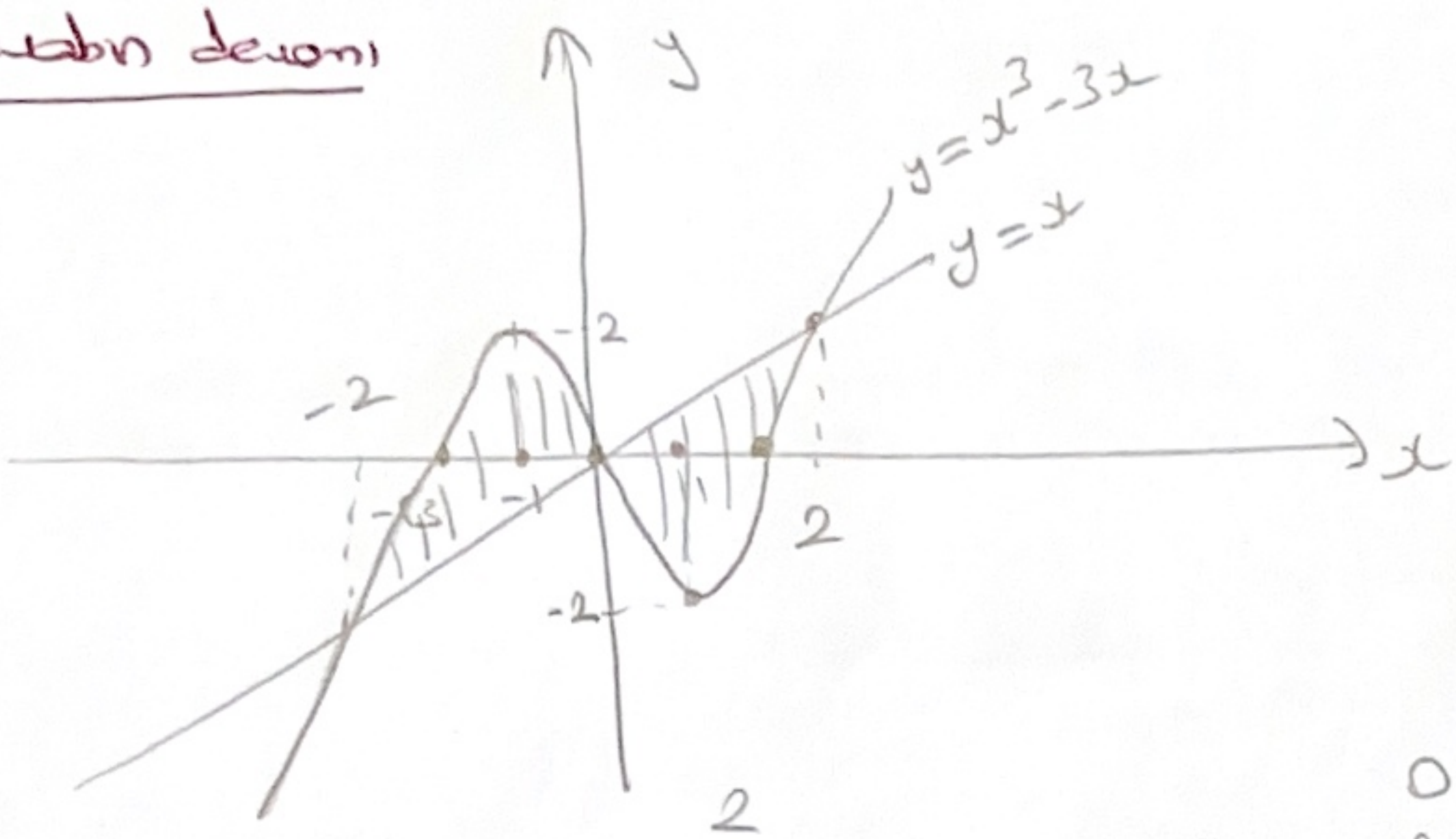
$y' = 3x^2-3 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \mp 1$ olur. $x=1 \Rightarrow y=-2$

$x=-1 \Rightarrow y=2$

$(-1,2)$ yerel maks, $(1,-2)$ yerel min olur.

4. cevabın devamı

İstenen alan A denirse



$$A=\int_{-2}^{0}(x^3-3x-x)\,dx+\int_{0}^{2}(x-x^3+3x)\,dx=\int_{-2}^{0}(x^3-4x)\,dx+\int_{0}^{2}(-x^3+4x)\,dx$$

$$=\left(\frac{x^4}{4}-2x^2\right)\Big|_{-2}^{0}+\left(-\frac{x^4}{4}+2x^2\right)\Big|_{0}^{2}$$

$$=-4+8+(-4+8)=8$$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\int_0^x \cos t^2\,dt}{6\arcsin x-6x-x^3}\to\dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır. L'Hospital yapılırsa

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\int_0^x \cos t^2\,dt}{6\arcsin x-6x-x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{6(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}-6-3x^2}\to\frac{0}{0}$$ belirsizliği (L'Hospital)

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2\cdot 2x}{-3(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x)-6x}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}-1}\to\frac{0}{0}$$ (L'Hospital)

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{2x}\cdot\cos x^2}{-\frac{3}{2}(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}(-\cancel{2x})}$$

$$=\frac{2}{9}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x^2}{(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}}=\frac{2}{9}$$

elde edilir.

6

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{n+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} \quad \dots (1)$$

yazılır. Burada $\int_0^1 f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

eşitliği kullanırsa (1) ifadesinde $f(x)=\frac{1}{1+x}$ olur. Böylece

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{n+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx$$

$$=\ln|1+x|\Big|_0^1=\ln 2$$

elde edilir.