1. soru	2. soru	3. soru	4. soru	5. soru	6. soru	7. soru	Toplam

Adı Soyadı: CEVAP ANAHTARI **11.04.2026**

Numara:

MAT 102 ANALİZ II DERSİ ARA SINAV SORULARI

1)
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos^2 x}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

fonksiyonunun $x_0=0$ noktasındaki türevini araştırınız **(10 puan).**

2) $y=x^2$ parabolünün $\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$ noktasına olan en kısa uzaklığını bulunuz **(15 puan).**

3) Ortalama değer teoremini ifade ediniz. Bu teoremi kullanarak, her $x>0$ için $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$ eşitsizliğinin doğru olduğunu gösteriniz. **(15 puan).**

4) $x^y+xy-2=0$ eğrisinin $(1,1)$ noktasından geçen teğet ve normal doğrularını bulunuz **(15 puan).**

5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^{x-2}+\ln(x-1)-\sin(x-2)-x+1}{(x-2)^3}$ limitini hesaplayınız **(10 puan).**

6) $f(x)=2^{\frac{1}{x}}-1$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz **(15 puan).**

7) Reel değişkenli reel değerli fonksiyonlar için aşağıda boş bırakılan yerlere **Doğru veya Yanlış** yazınız **(20 puan).**

a) Bir fonksiyon asimptotları ile kesişmez ....Yanlış...

b) Bir fonksiyon ikinci mertebeden türevinin kökleri fonksiyonun dönüm(büküm) noktalarıdır ....Yanlış...

c) Bir fonksiyonun türevini tanımsız yapan nokta fonksiyonu tanımsız yapmıyorsa bu nokta ekstremum nokta adayıdır.....Doğru

d) Bir fonksiyonun mutlak ekstremum noktaya sahip olması için gerek yeter şart fonksiyonun sınırlı olmasıdır.....Yanlış..

e) Sınırlı bir kümede tanımlı bir fonksiyon için yatay asimptot araştırılamaz. ...Doğru...

Not: 7. sorudaki her şık 4 puandır. Süre 90 dakikadır.

1) $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

bulunur.

2) $y = x^2$ parabolünün $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ noktasına uzaklığı için (x, x^2) ile $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ noktaları arasındaki en kısa uzaklığı bulmalıyız.

Bu mesafeye d denirse

$$d = \sqrt{(x-0)^2 + \left(x^2 - \frac{3}{2}\right)^2}$$

olur. Şimdi $f(x) = x^2 + \left(x^2 - \frac{3}{2}\right)^2$ fonksiyonunun minimum (mutlak) değerini bulalım

$$f'(x) = 2x + 2\left(x^2 - \frac{3}{2}\right) \cdot 2x = 2x\left(1 + 2x^2 - 3\right) = 2x\left(2x^2 - 2\right)$$

olup $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, \; x = \mp 1$ bulunur.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{5}{4}$	$\nearrow$	$\frac{9}{4}$	$\searrow$	$\frac{5}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(\mp 1) = \frac{5}{4} \qquad f(0) = \frac{9}{4}$

$\lim\limits_{x \to \mp\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \mp\infty} x^2 + \left(x^2 - \frac{3}{2}\right)^2 = +\infty$

$x = \mp 1$ için f en küçük değerini alır. O halde istenen uzaklık

$$d = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

bulunur.

3) <u>Ortalama değer teoremi</u>: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli ve (a,b) aralığında türevlenebilir bir fonksiyon olsun. O halde

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

olacak şekilde $\exists c \in (a,b)$ vardır

3. cevabın devamı)

$\forall x > 0$ için $f(x) = \ln(1+x)$ fonksiyonunu alalım. Bu fonksiyon $[0,x]$ aralığında sürekli ve $(0,x)$ aralığında türevlenebilir olduğundan ortalama değer teoreminin koşulları sağlanır. Böylece

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x} = \frac{\ln(1+x)}{x} \quad \dots (1)$$

olacak şekilde $\exists\, c \in (0,x)$ vardır. Ayrıca

$f'(x) = \frac{1}{1+x}$ olup $f'(c) = \frac{1}{1+c}$ olur. Böylece (1) den

$$\frac{1}{1+c} = \frac{\ln(1+x)}{x} \quad \dots (2)$$

yazılır. Burada $c \in (0,x)$ olup

$$0 < c < x \Rightarrow 1 < 1+c < x+1 \Rightarrow \frac{1}{x+1} < \frac{1}{1+c} < 1 \quad \dots (3)$$

olur. (2) ve (3) den

$\frac{1}{x+1} < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1$ olup $x > 0$ olduğundan her üç taraf x ile çarpılırsa

$$\frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x$$

elde edilir.

4) $x^y + xy - 2 = 0$ ifadesinde x'e göre türev alalım

$\frac{d}{dx}(x^y) + \frac{d}{dx}(xy) = 0$ olur. Öncelikle $\frac{d}{dx}(x^y)$ için

$z = x^y$ denirse $\ln z = \ln x^y \Rightarrow \ln z = y \cdot \ln x$

olup iki tarafta x'e göre türev alınırsa (kapalı fonksiyon türevi)

$$\frac{z'}{z} = y' \cdot \ln x + \frac{y}{x} \Rightarrow z' = z\left(y' \cdot \ln x + \frac{y}{x}\right) = x^y \cdot y' \cdot \ln x + x^y \frac{y}{x} \quad \dots (1)$$

bulunur. Böylece (1) den

$$\frac{d}{dx}(x^y) + \frac{d}{dx}(xy) = 0 \Rightarrow x^y \cdot y' \cdot \ln x + x^y \frac{y}{x} + (y + y'x) = 0$$

4. cevabın devamı)

$$\Rightarrow y'\left(x^y \cdot \ln x + x\right) = -x^y \frac{y}{x} - y \Rightarrow y' = -\frac{x^y \frac{y}{x} + y}{x^y \ln x + x}$$

olup (1,1) den geçen teğet doğrunun eğimine m_T denirse

$$m_T = y'\Big|_{(1,1)} = -\frac{1+1}{1} = -2$$ olur. O halde (1,1) den geçen normal

doğrunun eğimi m_N ise $m_T \cdot m_N = -1 \Rightarrow -2 \cdot m_N = -1 \Rightarrow m_N = \frac{1}{2}$ olur

(1,1) den geçen teğetin denklemi

$$y - 1 = -2(x-1) \Rightarrow y - 1 = -2x + 2 \Rightarrow y + 2x - 3 = 0$$

ve (1,1) den normal doğrunun denklemi

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x-1) \Rightarrow 2y - 2 = x - 1 \Rightarrow 2y - x - 1 = 0$$

bulunur

5) $$\lim_{x \to 2} \frac{e^{x-2} + \ln(x-1) - \sin(x-2) - x + 1}{(x-2)^3} \to \frac{0}{0}$$ belirsizliği vardır

L'Hospital yapılırsa

$$\lim_{x \to 2} \frac{e^{x-2} + \ln(x-1) - \sin(x-2) - x + 1}{(x-2)^3} = \lim_{x \to 2} \frac{e^{x-2} + \frac{1}{x-1} - \cos(x-2) - 1}{3(x-2)^2} \to \frac{0}{0} \quad \text{(L'Hospital)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{e^{x-2} - \frac{1}{(x-1)^2} + \sin(x-2)}{6(x-2)} \to \frac{0}{0} \quad \text{(L'Hospital)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{e^{x-2} + \frac{2}{(x-1)^3} + \cos(x-2)}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

bulunur

6) ① Tanım Kümesi : $x \neq 0$ olmalıdır. O halde f nin tanım kümesi $\mathbb{R} - \{0\}$ dır.

② Eksenleri Kesim Noktaları $x = 0$ olamaz. $2^{\frac{1}{x}} - 1 = 0 \Rightarrow 2^{\frac{1}{x}} = 1 \Rightarrow 2^{\frac{1}{x}} = 2^0$ olup $\frac{1}{x} = 0$ olacak şekilde $x \in \mathbb{R}$ yoktur. Eksenleri kesmez.

③ Asimptotlar

a) Düşey Asimptot : $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} 2^{\frac{1}{x}} - 1 = -1$

$\lim\limits_{x \to 0^+} 2^{\frac{1}{x}} - 1 = +\infty$ olup $x = 0$ düşey asimptot olur.

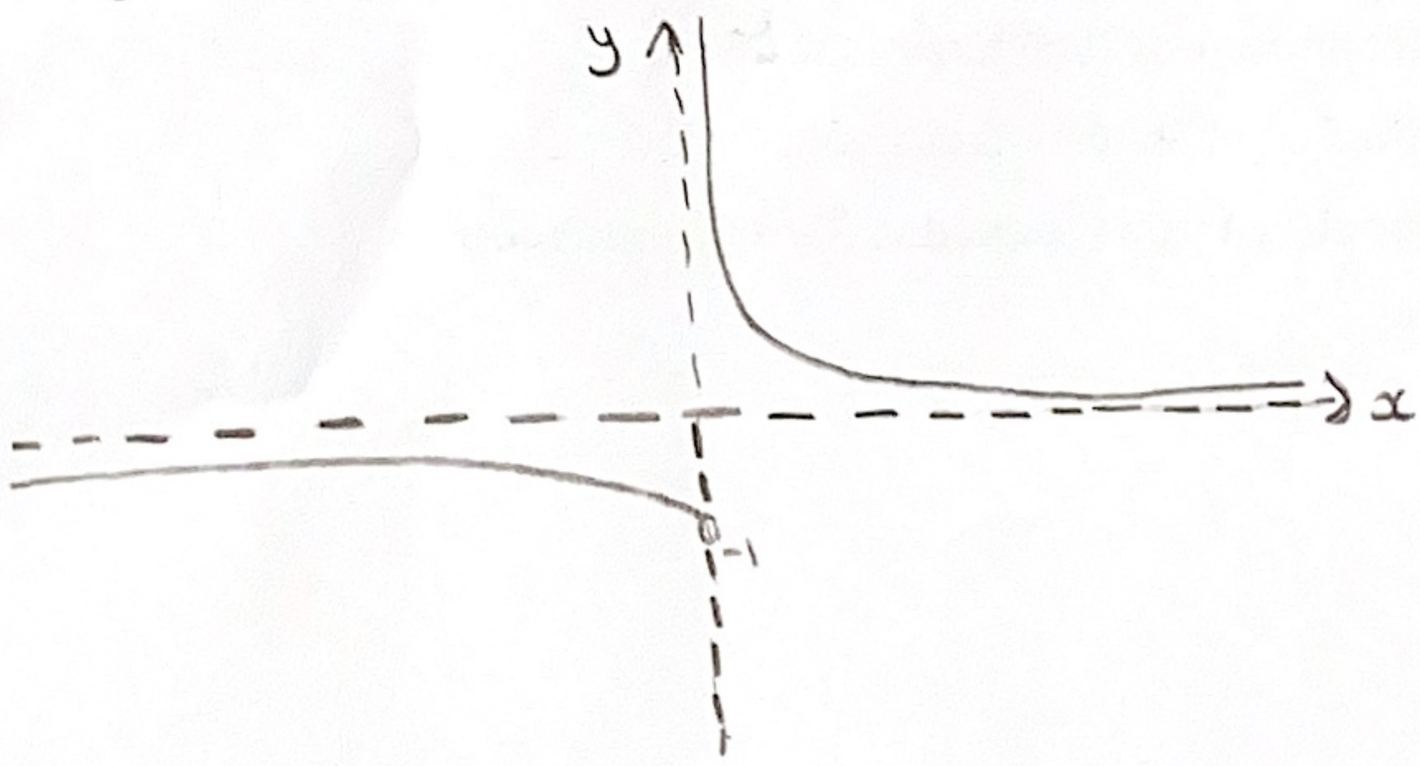
b) Yatay Asimptot: $\lim\limits_{x \to \mp\infty} 2^{\frac{1}{x}} - 1 = 0$ olup $y = 0$ yatay asimptot dur.

O halde eğik ve eğri asimptot yoktur.

④ Türev (1. mertebeden) $f(x) = 2^{\frac{1}{x}} - 1 \Rightarrow f'(x) = 2^{\frac{1}{x}} \cdot \ln 2 \left(-\frac{1}{x^2}\right)$

olup $f'(x) = 0$ olacak şekilde $x \in \mathbb{R}$ yoktur. Ancak $x \neq 0$ iken $2^{\frac{1}{x}} > 0$, $\frac{1}{x^2} > 0$ ve $\ln 2 > 0$ olduğundan $f'(x) < 0$ dır. Yani f azalandır.

⑤ Tablo

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	$\|\|$	$-$	
f	$y=0$	$\searrow$	$-1 \quad +\infty$	$\searrow$	$y=0$

f nin grafiği aşağıdaki gibidir.