

MAT 102 ANALİZ II BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI

1) Aşağıdaki fonksiyonlar için $y' = \frac{dy}{dx}$ türevini bulunuz. (15 puan)

a) $e^y = x + y$

b) $y = (\arcsin x)^{\frac{\sin x}{3x}}$

c) $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$

2) $y = \ln\left(\tan \frac{x}{2}\right) - \frac{\cos x}{\sin^2 x}$ fonksiyonunun $x = \frac{\pi}{2}$ noktasında çizilen teğet ve normal doğrusu denklemlerini bulunuz. (10 puan)

3) 60 cm uzunluğundaki bir ip ile bir daire diliminin tüm çevresi oluşturulacaktır. Bu daire diliminin alanının maksimum olması için yarıçapı ne olmalıdır? (15 puan)

4) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 + mx^2 + nx - 3$ fonksiyonunun dönüm noktası $(1,3)$ ise m ve n değerlerini bulunuz. (10 puan)

5) $f(x) = x^2$ fonksiyonuna $[-1,1]$ aralığında İntegraller için Ortalama Değer teoremini uygulayınız, uygun c sayısını bulunuz. (10 puan)

6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+4} + \frac{n}{n^2+9} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \right]$ limitini hesaplayınız. (10 puan)

7) $\int_{-2}^2 \lceil x \rceil |x-1| \operatorname{sgn}(x^2-1) dx$ integralini hesaplayınız. (10 puan)

8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos \sqrt[3]{x} dx}{\cos x - 1}$ limitini hesaplayınız. (10 puan)

9) $y = x^2 - 4x + 5$, $x = 1$, $x = 4$ ve x eksenini ile sınırlı bölgenin x eksenini etrafında dönmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz. (10 puan)

Not: Sınav süresi 100 dakikadır.

Başarılar...
Doç. Dr. Nilay DEĞİRMEN

$$1-) a) e^y = x+y \Rightarrow e^y \cdot y' = 1+y' \Rightarrow (e^y-1) y' = 1$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{e^y-1}$$

$$b) y = (\arcsin x)^{\frac{\sin x}{3x}} \Rightarrow \ln y = \frac{\sin x}{3x} \cdot \ln(\arcsin x)$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \left(\frac{\sin x}{3x}\right)' \cdot \ln(\arcsin x) + \frac{\sin x}{3x} \cdot (\ln(\arcsin x))'$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{\cos x \cdot 3x - \sin x \cdot 3}{(3x)^2} \cdot \ln(\arcsin x)$$

$$+ \frac{\sin x}{3x} \cdot \frac{1}{\arcsin x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow y' = (\arcsin x)^{\frac{\sin x}{3x}} \left[\frac{(x \cos x - \sin x) \ln(\arcsin x)}{3x^2} + \frac{\sin x}{3x \arcsin x \sqrt{1-x^2}} \right]$$

$$c) \left. \begin{array}{l} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$$

2-) Arasnav sorusu

3-)



$$\text{Alan: } A(r) = \frac{1}{2} r^2 \cdot \frac{2(30-r)}{60-2r} = 30r - r^2$$

$$A'(r) = 30 - 2r = 0 \Rightarrow r = 15$$

$$A''(r) = -2 < 0 \quad \rightarrow \text{maksimum yoper yorcap}$$

4-) $f(x) = x^3 + mx^2 + nx - 3$, $(1, 3)$ dönüm noktası

$$f'(x) = 3x^2 + 2mx + n$$

$$f''(x) = 6x + 2m \Rightarrow f''(1) = 6 + 2m = 0 \Rightarrow 2m = -6 \\ \Rightarrow \boxed{m = -3}$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + nx - 3$$

$$f(1) = 1 - 3 + n - 3 = 3 \Rightarrow \boxed{n = 8}$$

$$5-) f(x) = x^2, \quad [-1, 1]$$

$$\int_{-1}^1 x^2 dx = (1 - (-1)) \cdot f(c) \Rightarrow \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 = 2 \cdot c^2$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} = 2 \cdot c^2$$

$$\Rightarrow c^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow c = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$6-) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+4} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\frac{n^2}{n^2+1^2} + \frac{n^2}{n^2+2^2} + \frac{n^2}{n^2+3^2} + \dots + \frac{n^2}{n^2+n^2} \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\frac{1}{1+(\frac{1}{n})^2} + \frac{1}{1+(\frac{2}{n})^2} + \frac{1}{1+(\frac{3}{n})^2} + \dots + \frac{1}{1+(\frac{n}{n})^2} \right]$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right]$$

$$= \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

$$7-) \int_{-2}^2 [x] |x-1| \operatorname{sgn}(x^2-1) dx$$

	-1	1
x^2-1	+ 0 -	0 +
$x-1$	-	- 0 +

$$= \int_{-2}^{-1} [x] |x-1| (+1) dx + \int_{-1}^1 [x] |x-1| (-1) dx + \int_1^2 [x] |x-1| (+1) dx$$

$$= \int_{-2}^{-1} [x] (1-x) dx + \int_{-1}^1 [x] (x-1) dx + \int_1^2 [x] (x-1) dx$$

$$= \int_{-2}^{-1} (-2)(1-x) dx + \int_{-1}^0 (-1)(x-1) dx + \underbrace{\int_0^1 0 \cdot (x-1) dx}_0 + \int_1^2 1 \cdot (x-1) dx$$

$$= \int_{-2}^{-1} 2x-2 dx + \int_{-1}^0 1-x dx + \int_1^2 x-1 dx$$

$$= (x^2 - 2x) \Big|_{-2}^{-1} + \left(x - \frac{x^2}{2}\right) \Big|_{-1}^0 + \left(\frac{x^2}{2} - x\right) \Big|_1^2$$

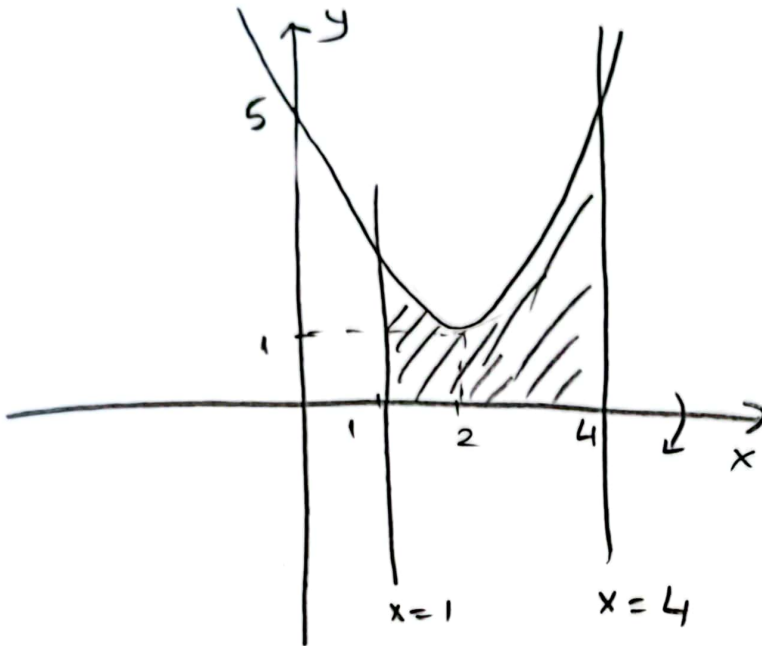
$$= -3$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos^3 \sqrt{x} \, dx}{\cos x - 1} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(3x^2) \cdot \cos^3 \sqrt{x}}{-\sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 \cos x}{\sin x} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3(2x \cdot \cos x + x^2 (-\sin x))}{\cos x}$$

$$= 0$$

9) $y = x^2 - 4x + 5$, $x = 1$, $x = 4$, x eksenini



$$y = x^2 - 4x + 5$$

$$= (x-2)^2 + 1$$

$x=0$ için $y=5$

$$V = \pi \int_1^4 ((x-2)^2 + 1)^2 \, dx$$

$$= \pi \int_1^4 (x-2)^4 + 1 + 2(x-2)^2 \, dx$$

$$= \pi \left[\frac{(x-2)^5}{5} + x + 2 \cdot \frac{(x-2)^3}{3} \right] \Big|_1^4$$

$$= \pi \left[\frac{32}{5} + 4 + \frac{16}{3} - \left(-\frac{1}{5} + 1 - \frac{2}{3} \right) \right]$$

$$= \frac{78}{5} \pi$$